『MEMS センサを用いた低コスト INS/GPS 複合航法システム』数式リスト

成岡 優

2006 年 3 月 20 日

1　システムモデルに関する式

1.1　速度 運動方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} = \tilde{q}_b^{n*}\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix}\tilde{q}_b^n + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \left(2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n\right) \times \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \tag{1}$$

1.2　位置 運動方程式

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_e^n = \frac{1}{2}\tilde{q}_e^n\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix},\ \frac{d}{dt}h = -(\dot{r}_e^n)_Z \tag{2}$$

1.3　姿勢 運動方程式

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_n^b = \frac{1}{2}\left[\tilde{q}_n^b\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \end{Bmatrix} - \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix}\right)\tilde{q}_n^b\right] \tag{3}$$

2　誤差モデルに関する式

2.1　線形化

2.1.1　速度 運動方程式の線形化

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta\dot{\vec{r}}_e^n = \mathrm{Rot}\left[\tilde{q}_n^{b*}\right]\Delta\vec{a}^b \\
&- 2\begin{bmatrix} 0 & -R_{02}a_0^b - R_{12}a_1^b - R_{22}a_2^b & R_{01}a_0^b + R_{11}a_1^b + R_{21}a_2^b \\ R_{02}a_0^b + R_{12}a_1^b + R_{22}a_2^b & 0 & -R_{00}a_0^b - R_{10}a_1^b - R_{20}a_2^b \\ -R_{01}a_0^b - R_{11}a_1^b - R_{21}a_2^b & R_{00}a_0^b + R_{10}a_1^b + R_{20}a_2^b & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_n^b} \Delta\vec{u}_n^b \\
&+ \Delta\vec{g}^n + \frac{1}{r_e+h}\begin{bmatrix} \dot{r}^e_{nZ} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{r}^e_{nZ} & 0 \\ -\dot{r}^e_{nX} & -\dot{r}^e_{nY} & 0 \end{bmatrix}\Delta\dot{\vec{r}}_e^n - \frac{1}{(r_e+h)^2}\begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_X(\dot{r}_e^n)_Z \\ (\dot{r}_e^n)_Y(\dot{r}_e^n)_Z \\ -(\dot{r}_e^n)_X^2 - (\dot{r}_e^n)_Y^2 \end{pmatrix}\Delta h \\
&+ 4\Omega_{e/i}\begin{bmatrix} R_{21}(\dot{r}_n^e)_Y - R_{11}(\dot{r}_n^e)_Z & R_{10}(\dot{r}_n^e)_Z - R_{20}(\dot{r}_n^e)_Y & 0 \\ R_{01}(\dot{r}_n^e)_Z - R_{21}(\dot{r}_n^e)_X & R_{20}(\dot{r}_n^e)_X - R_{00}(\dot{r}_n^e)_Z & 0 \\ R_{11}(\dot{r}_n^e)_X - R_{01}(\dot{r}_n^e)_Y & R_{00}(\dot{r}_n^e)_Y - R_{10}(\dot{r}_n^e)_X & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n}\Delta\vec{u}_e^n \\
&- \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_1 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix}_{2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n}\Delta\dot{\vec{r}}_e^n
\end{aligned} \tag{4}
$$

2.1.2　位置 運動方程式の線形化

$$
\frac{d}{dt}\Delta\vec{u}_e^n = \frac{1}{2(r_e+h)}\begin{bmatrix} -R_{10} & R_{00} & 0 \\ -R_{11} & R_{01} & 0 \\ -R_{12} & R_{02} & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n}\Delta\dot{\vec{r}}_e^n + \frac{1}{2(r_e+h)^2}\begin{pmatrix} R_{10}(\dot{r}_e^n)_X - R_{00}(\dot{r}_e^n)_Y \\ R_{11}(\dot{r}_e^n)_X - R_{01}(\dot{r}_e^n)_Y \\ R_{12}(\dot{r}_e^n)_X - R_{02}(\dot{r}_e^n)_Y \end{pmatrix}_{\tilde{q}_e^n}\Delta h \tag{5}
$$

$$
\frac{d}{dt}\Delta h = -\Delta(\dot{r}_e^n)_Z \tag{6}
$$

2.1.3　姿勢 運動方程式の線形化

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta\vec{u}_n^b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} R_{00} & R_{10} & R_{20} \\ R_{01} & R_{11} & R_{21} \\ R_{02} & R_{12} & R_{22} \end{bmatrix}_{\tilde{q}_n^b}\Delta\vec{\omega}_{b/i}^b - \Omega_{e/i}\begin{bmatrix} R_{01} & -R_{00} & 0 \\ R_{11} & -R_{10} & 0 \\ R_{21} & -R_{20} & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n}\Delta\vec{u}_e^n \\
&- \frac{1}{2(r_e+h)}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Delta\dot{\vec{r}}_e^n + \frac{1}{2(r_e+h)^2}\begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \\ -(\dot{r}_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix}\Delta h \\
&- \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_1 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n}\Delta\vec{u}_n^b
\end{aligned} \tag{7}
$$

2.2　誤差モデルの運動方程式

式 (4), (5), (6), (7) をまとめると以下のようにかける。

$$x \equiv \begin{bmatrix} \Delta\dot{\vec{r}}_n^e \\ \Delta\vec{u}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta\vec{u}_n^b \end{bmatrix},\ u \equiv \begin{bmatrix} \Delta\vec{a}^b \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \\ \Delta\vec{g} \end{bmatrix} \tag{8}$$

と書けば、誤差モデルの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu \tag{9}$$

2.3 誤差モデルとシステムモデルの関係

$$z \equiv \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_e^n \\ \tilde{q}_e^n \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_e^n \\ \tilde{q}_e^n \\ h \end{bmatrix}_{\mathrm{GPS}} \tag{10}$$

と書けば、GPS の観測誤差が v とすると

$$z = Hx + v \tag{11}$$

ここで H は

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 4} & 0 \\ \mathbf{0}_{4\times 3} & \begin{bmatrix} -(q_e^n)_1 & -(q_e^n)_2 & -(q_e^n)_3 \\ (q_e^n)_0 & (q_e^n)_3 & -(q_e^n)_2 \\ -(q_e^n)_3 & (q_e^n)_0 & (q_e^n)_1 \\ (q_e^n)_2 & -(q_e^n)_1 & (q_e^n)_0 \end{bmatrix} & 0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

2.4 Kalman Filter Predict

$$P_{k+1} = (I + A\Delta t)P_k(I + A\Delta t)^{\mathrm{T}} + (B\Delta t)Q(B\Delta t)^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

2.5 Kalman Filter Correct

$$K_k = P_k H_k^{\mathrm{T}}(H_k P_k H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} \tag{14}$$

$$P_k \to (I - K_k H_k)P_k \tag{15}$$

$$x_k \equiv \begin{bmatrix} \Delta\dot{\vec{r}}_n^e \\ \Delta\vec{u}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta\vec{u}_n^b \end{bmatrix}_k = K_k z_k \tag{16}$$

$$\dot{\vec{r}}_n^e \to \dot{\vec{r}}_n^e - (\Delta\dot{\vec{r}}_n^e)_k \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_e^n &\to \begin{Bmatrix} 1 \\ (\Delta u_e^n)_k \end{Bmatrix}^* \tilde{q}_e^n, \\ h &\to h - (\Delta h)_k \end{aligned} \tag{18}$$

$$\tilde{q}_n^b \to \begin{Bmatrix} 1 \\ (\Delta u_n^b)_k \end{Bmatrix}^* \tilde{q}_n^b \tag{19}$$