

低精度 MEMS センサと汎用 GPS 受信機の融合による  
高精度航法システムの研究

成岡 優

2007 年 2 月 19 日

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	航空宇宙分野で培われた航法技術	2
1.2.1	INS	2
1.2.2	GPS	3
1.2.3	磁気コンパス	5
1.3	低精度 MEMS センサと汎用 GPS 受信機の融合による INS/GPS	5
第 2 章	Kalman Filter	7
2.1	最小二乗法	7
2.2	重み付き最小二乗法	9
2.3	再帰的重み付き最小二乗法	10
2.4	離散系 Kalman Filter	11
2.5	離散系 Kalman Filter の連続系への適用	14
2.6	離散 Extended Kalman Filter	15
2.7	UD 分解 Kalman Filter	17
2.7.1	UD 分解	17
2.7.2	Time Update	17
2.7.3	Measurement Update	18
第 3 章	Quaternion を利用した INS/GPS アルゴリズム	20
3.1	記号ならびに座標系について	20
3.2	INS と GPS の統合方式	21
3.3	システム方程式	23
3.3.1	速度の方程式	24
3.3.2	位置の方程式	30
3.3.3	姿勢の方程式	30
3.4	観測方程式	31
3.5	INS/GPS アルゴリズム	32
3.5.1	Quaternion の誤差	33

3.5.2	誤差システム方程式	34
3.5.3	誤差観測方程式	43
3.5.4	Time Update	44
3.5.5	Measurement Update	44
3.6	実用上の付記	46
3.6.1	Time Update と Measurement Update のタイミング	46
3.6.2	初期化について	46
3.6.3	誤差共分散行列の設定	47
3.6.4	慣性センサのバイアス変動推定	47
3.6.5	非線形性と Kalman Filter	49
第 4 章	数値シミュレーション	51
4.1	MEMS 慣性センサのモデリング	51
4.1.1	慣性センサモデル 1: 単純なホワイトノイズのみの場合	51
4.1.2	慣性センサモデル 2: ジャイロのランダムドリフトを考慮した場合	52
4.2	水平定常旋回シミュレーション	54
4.2.1	条件	54
4.2.2	結果ならびに考察	56
4.3	バイアス変動推定の有無による違い	61
4.3.1	条件	61
4.3.2	結果ならびに考察	61
4.4	Euler 角アルゴリズム、単純線形化アルゴリズムとの比較	61
4.5	まとめ	62
第 5 章	実機試験	64
5.1	作成したプロトタイプ	64
5.2	較正作業	67
5.2.1	加速度計、ジャイロのゼロ点の温度特性	68
5.2.2	ジャイロの取付け誤差	68
5.3	2005 年 11 月 調布セスナ実験	68
5.4	2006 年 4 月 竜ヶ崎セスナ実験	74
5.5	2006 年 6 月 調布飛行場 MuPAL- $\alpha$ 実験	80
5.5.1	これまでの実験と同じアルゴリズムでの比較	83
5.5.2	プロトタイプと GAIA の慣性センサ出力比較	86
5.5.3	バイアス変動推定を加えた状態での比較	89
5.5.4	高い精度をもつ GAIA のジャイロで計算を行った場合での比較	92
5.5.5	較正作業結果を反映しなかった場合での比較	94
5.6	まとめ	96

第 6 章	結言	98
付録 A	Quaternion Algebra	99
A.1	Quaternion の定義	100
A.2	共役 Quaternion の定義	100
A.3	Quaternion のスカラー積	101
A.4	Quaternion 間の加算	101
A.5	Quaternion 間の乗算	101
A.6	Quaternion による 3 次元ベクトルの回転	102
A.7	Quaternion による回転の合成	104
A.8	Quaternion の時間微分	104
A.9	回転 Quaternion と Direction Cosine Matrix の関係	105
付録 B	Coordinate Systems	106
B.1	Earth-Centered Inertial Frame ( <i>i-Frame</i> )	107
B.2	Earth-Centered, Earth-Fixed Frame ( <i>e-Frame</i> )	107
B.3	Local Geodetic Frame ( <i>g-Frame</i> )	107
B.4	Navigation Frame (Wander Azimuth Frame) ( <i>n-Frame</i> )	107
B.5	Body Frame ( <i>b-Frame</i> )	108
B.6	座標変換の表記	108
B.7	<i>i-Frame</i> と <i>e-Frame</i> の関係	109
B.8	<i>e-Frame</i> と <i>g-Frame</i> の関係	110
B.9	<i>g-Frame</i> と <i>n-Frame</i> の関係	111
B.10	<i>e-Frame</i> と <i>n-Frame</i> の関係	111
B.11	<i>n-Frame</i> と <i>b-Frame</i> の関係	113
付録 C	Earth Model(WGS-84)	114
C.1	楕円モデル	114
C.2	南北方向ならびに東西方向の曲率半径	115
C.3	重力	116
C.4	WGS-84	116
付録 D	Euler 角による Loose coupling INS/GPS アルゴリズム	118
D.1	システム方程式	118
D.1.1	速度の方程式	118
D.1.2	位置の方程式	119
D.1.3	姿勢の方程式	120
D.2	観測方程式	120
D.3	誤差システム方程式	120



---

D.3.1	速度の誤差方程式	121
D.3.2	位置の誤差方程式	122
D.3.3	姿勢の誤差方程式	123
D.4	誤差観測方程式	123
D.5	Kalman Filter との統合	124
D.5.1	Time Update	124
D.5.2	Measurement Update	124
付録 E	単純線形化による Loose coupling INS/GPS アルゴリズム	125
E.1	誤差システム方程式	125
E.1.1	速度の方程式	125
E.1.2	位置の方程式	127
E.1.3	姿勢の方程式	128
E.1.4	誤差システム方程式	128
E.2	誤差観測方程式	131
付録 F	Allan Variance	132
付録 G	プロトタイプ基板	134
G.1	USB マイコン基板	134
G.2	加速度計基板	136
G.3	ジャイロ基板	137
G.4	GPS 基板	138
参考文献		139

# 目次

3.1	座標系	21
3.2	Loose coupling INS/GPS アルゴリズム	23
3.3	<i>n-Frame</i> の変化	28
3.4	向心力	30
4.1	慣性センサモデル 1	52
4.2	慣性センサモデル 2 におけるジャイロの処理過程図	53
4.3	ADXRS150 の Allan Variance	54
4.4	慣性センサモデル 2 のジャイロの Allan Variance	55
4.5	慣性センサモデル 1 のジャイロの Allan Variance	55
4.6	シミュレーション 位置履歴 (1 周)	57
4.7	シミュレーション 速度履歴 (1 周)	58
4.8	シミュレーション 姿勢履歴 (1 周)	58
4.9	シミュレーション 位置履歴 (5 周)	59
4.10	シミュレーション 速度履歴 (5 周)	60
4.11	シミュレーション 姿勢履歴 (5 周)	60
4.12	シミュレーション (バイアス変動推定付き) 位置履歴 (5 周)	62
4.13	シミュレーション (バイアス変動推定付き) 速度履歴 (5 周)	63
4.14	シミュレーション (バイアス変動推定付き) 姿勢履歴 (5 周)	63
5.1	プロトタイプ 外観	65
5.2	プロトタイプ 構成図	65
5.3	MEMS 加速度計 (LIS3L02AS4)	66
5.4	MEMS ジャイロ (ADXRS150)	66
5.5	プロトタイプで用いた GPS 受信機 (TIM-LA)	66
5.6	加速度計 ゼロ点 温度特性	69
5.7	ジャイロ ゼロ点 温度特性	70
5.8	ジャイロ取付け誤差計測	71
5.9	ジャイロ取付け誤差 測定結果	72
5.10	Crossbow NAV420	73

5.11	Crossbow NAV420	73
5.12	2005 年 11 月 実験の様子	74
5.13	2005 年 11 月 プロトタイプ (左) と NAV420(右)	75
5.14	NAV420 との比較実験 位置履歴 (2005 年 11 月 1 回目)	75
5.15	NAV420 との比較実験 速度履歴 (2005 年 11 月 1 回目)	76
5.16	NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2005 年 11 月 1 回目)	76
5.17	NAV420 との比較実験 位置履歴 (2005 年 11 月 2 回目)	77
5.18	NAV420 との比較実験 速度履歴 (2005 年 11 月 2 回目)	77
5.19	NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2005 年 11 月 2 回目)	78
5.20	NAV420 との比較実験 位置履歴 (2005 年 11 月 3 回目)	78
5.21	NAV420 との比較実験 速度履歴 (2005 年 11 月 3 回目)	79
5.22	NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2005 年 11 月 3 回目)	79
5.23	NAV420 との比較実験 位置履歴 (2006 年 4 月)	80
5.24	NAV420 との比較実験 速度履歴 (2006 年 4 月)	81
5.25	NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2006 年 4 月)	81
5.26	GAIA	82
5.27	MuPAL- $\alpha$	82
5.28	プロトタイプの MuPAL- $\alpha$ 機内への設置状態	82
5.29	GAIA との比較実験 位置履歴	83
5.30	GAIA との比較実験 速度履歴	84
5.31	GAIA との比較実験 姿勢履歴	84
5.32	2006 年 6 月 GAIA との比較実験 対地速度に対する横滑り履歴	86
5.33	加速度計 出力値比較	87
5.34	ジャイロ 出力値比較	88
5.35	GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 位置履歴	89
5.36	GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 速度履歴	90
5.37	GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 姿勢履歴	90
5.38	GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 対地速度に対する横滑り履歴	91
5.39	GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 位置履歴	92
5.40	GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 速度履歴	93
5.41	GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 姿勢履歴	93
5.42	GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 対地速度に対する横滑り履歴	94
5.43	GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 位置履歴	95
5.44	GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 速度履歴	95
5.45	GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 姿勢履歴	96
5.46	GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 対地速度に対する横滑り履歴	97
6.1	新プロトタイプ	98

---

B.1	右手座標系 . . . . .	106
B.2	<i>e-Frame</i> と <i>g-Frame</i> . . . . .	107
B.3	<i>g-Frame</i> と <i>n-Frame</i> . . . . .	108
B.4	<i>n-Frame</i> と <i>b-Frame</i> . . . . .	109
C.1	地球モデル . . . . .	114
G.1	USB マイコン基板 回路図 . . . . .	135
G.2	USB マイコン基板 アートワーク . . . . .	136
G.3	加速度計基板 回路図 . . . . .	136
G.4	加速度計基板 アートワーク . . . . .	137
G.5	ジャイロ基板 回路図 . . . . .	137
G.6	ジャイロ基板 アートワーク . . . . .	137
G.7	GPS 基板 回路図 . . . . .	138
G.8	GPS 基板 アートワーク . . . . .	138

# 表目次

1.1	代表的な位置・姿勢推定機構	2
1.2	本研究で想定する位置・姿勢推定機構の仕様	5
3.1	座標系の種類	20
3.2	代表的な記号	22
5.1	プロトタイプ 構成詳細	66
5.2	ゼロ点 温度特性	68
5.3	ジャイロ取付け誤差 解析結果	71
5.4	Crossbow NAV420 の性能緒言	74
5.5	MuPAL- $\alpha$ 飛行計画	83
5.6	プロトタイプと GAIA の差異	85
5.7	プロトタイプと GAIA の差異 (バイアス変動推定付き)	89
5.8	プロトタイプと GAIA の差異 (GAIA ジャイロを利用)	94
5.9	プロトタイプと GAIA の差異 (較正結果適用なし)	96
A.1	座標変換の方法	99
B.1	座標変換の表記	109
C.1	WGS-84 の定数	117

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 はじめに

2005 年 12 月におきた JR 羽越線の強風による脱線事故において、原因究明が遅れたということがあった。なぜだろうか? これは計測機器の未設置によるものが大きく、車両の状態をモニタリングする装置が搭載されていなかったためである。事故原因を把握し、安全を確保するためには、このようなモニタリング技術は非常に重要である。

また近年では、ロボットなどの無人システムが人間の文化的な生活を支えるための道具として用いられる契機がある。陸上では移動する警備ロボットなどが実用化されつつある。また、航空分野にも目を向けてみると、無人航空機 (Unmanned Aerial Vehicle、UAV) が盛んに開発されている。これらは人間が行うには危険であったり、あるいは人間を利用するにはコストがかかり過ぎる作業を、人為的な要素を排した無人システムに代行させることによって、安全性や効率の向上を図ったものである。

ところで、このような車両やロボットなどの移動体に対して制御や監視を行う際、対象物体の位置や速度、姿勢といった基本的な状態量を得ることは必要不可欠である。そのような要請に対して、航空機や宇宙機で培われた航法技術を適用すれば解決可能であるにも関わらず、それらが積極的に活用されている事例はあまりない。なぜなら、それは精度が第一に求められる航空宇宙用途を意図しており、車両やロボット等の移動体に対して汎用的に使用されるにはあまりにも大きく、重く、高価であるからである。汎用的に利用されるためには多少の精度を犠牲にしても、小型、軽量、安価である必要がある。

そこで本研究では、航空宇宙分野で培われた航法技術の 1 つである INS/GPS 複合航法に目をつけ、これが汎用的に利用できないか検討を行った。INS/GPS は名前のとおり、Inertial Navigation System(慣性航法システム、INS) と Global Positioning System(GPS) という 2 つのシステムを統合したシステムである。両システムについては次節にて詳しく述べるが、電子回路技術の発達等によって両システムともこれらの要請を十分に満たせる可能性がでてきた。

なお、現在このような状況において、類似の研究が参考文献 [4] や [5] にあるとおり世界的に行われている。本研究もこれらに追従するものであるが、異なるアルゴリズムの提案、並びに精度を正確に求めたという点において異なるものである。

## 1.2 航空宇宙分野で培われた航法技術

汎用的に利用される航法技術の確立を目指すにあって、数ある航空宇宙分野の航法技術から INS/GPS を選択したが、これらの航法技術として代表的なものを表1.1 にあげる。なお、これらが統合されてひとつのシステムをなすこともある。

表 1.1: 代表的な位置・姿勢推定機構

推定機構名	INS (ジンバル方式)	INS (ストラップ ダウン方式)	GPS (単体測位)	GPS (DGPS)	磁気コンパス
位置の推定	可	可	可	可	不可
姿勢の推定	可	可	速度方向のみ 可	可 (複数使用 により可)	可
必要となる 内部機構	慣性センサ・ジ ンバル	慣性センサ・高 性能計算機	アンテナ・処理 ユニット	アンテナ・処理 ユニット	磁気センサ・処 理ユニット
必要となる 外部機構	なし	なし	GPS 衛星電波	GPS 衛星電 波・補正電波	地磁気
精度 (瞬時)	ジンバル・慣性 センサの精度 に依存	慣性センサの 精度に依存	10m~20m 程 度 (L1 電波使 用)	数 m 程度 (L1 電波使用)	地磁気に依存
精度 (時間依存)	時間がたつご とに悪化	時間がたつご とに悪化	時間依存なし	時間依存なし	時間依存なし
データ 更新周期	> 10Hz	> 10Hz	Hz 程度	Hz 程度	Hz 程度

それぞれについて見ていくと以下のとおりである。

### 1.2.1 INS

加速度および角速度を慣性力を感知する慣性センサを用いて位置・姿勢推定をおこなう機構を INS という。慣性センサには、慣性座標に対する加速度を感知する加速度計、および回転角速度を検出するジャイロの2種類があり、それらを総称して慣性センサと呼んでいる。運動の法則から、加速度を積分することにより速度が、また速度を積分することにより位置がわかる。同様に、角速度を積分することにより姿勢がわかる。このような理論を応用したのが INS であり、3次元上の航法装置として機能するためには、3つの直交する軸にとりつけられた3個の加速度計、同じく3つの直交した軸に取り付けられた3個のジャイロが最低必要となる。INS は連続的にデータが取得可能な慣性センサの情報のみを利用するため、

更新周期が短く途切れのない状態量推定を行えるのが大きな利点である。

INSには慣性センサをとりつける方式から次の2種類に大別される。

- ジンバル (Gimbal) 方式

ジンバルと呼ばれる常に水平面を維持する機構上に慣性センサをとりつける方式をジンバル方式と呼ぶ。ジンバル上に置かれた慣性センサが加速度・および角速度を検出し、それを打ち消すようにジンバルをアクチュエータによって動かすことによって水平を常に維持する仕組みになっている。ジンバルが常に水平面を保つことから、積分は単純にある一定のサンプリング周期で足し算を行えばよい。従って演算能力はさほど必要がない。しかし、ジンバルは機械的な構造であるため、ジンバル方式のINSを小さくつくることには限度がある。またジンバルの機械的誤差が存在するため、ある程度以上の精度の向上は難しい。

- ストラップダウン (Strap-down) 方式

ジンバルのような機械的な機構を介さずに、機体に直接慣性センサをとりつける方式をストラップダウン方式という。ジンバル方式と違い、一切の機械的な構造を必要としない。慣性センサは機体の軸にそった加速度および角速度を検出することになるため、速度や位置、姿勢を求めるためには座標変換を行う必要がある。そのため演算負荷は高く、ジンバル方式よりも高度な演算能力を必要とする。機械的誤差はセンサの取り付け精度程度のみであり、これは事前の較正作業によって十分に補正が可能である。従ってジンバル方式よりもよい精度が得られるとされている。

両方式のどちらにおいても、INSで最も重要な部品は慣性センサである。一般にセンサはホワイトノイズを持つが、慣性センサはそれに加えて、時間が経過することにゼロ点の変動するランダムドリフトという性質がある。そのため時間が経つごとにINSの精度は劣化する。ランダムドリフトが少ない慣性センサほど精度がよいセンサとなるのだが、例えば民間航空機で使用されているINS用のジャイロはランダムドリフトが0.001deg/hr以下のRing Laser Gyro(RLG)と呼ばれる特殊なジャイロを使用している。精度がよい慣性センサほど価格が高くなり、先のRLGでは数百~数千万円/個である。

一方、カーナビなどに使用される小型で価格も1万円程度の慣性センサが最近では市場に流通するようになった。微細加工技術(Micro Electro Mechanical Systems、MEMS)と呼ばれるテクノロジーを応用した製品であり、1枚のシリコンウェハースの上に微細加工技術によって慣性力を検出する機械的部分とそれを電気信号に変換する部分を形成したものである。これらのセンサは先のRLGに精度は遠く及ばない。

## 1.2.2 GPS

地球上での航行を考えるのであればGlobal Positioning System(GPS)を位置・姿勢推定機構として利用することができる。一般にGPSというと米国が保有しているシステムであるNavstar GPS(Navigation Satellite Timing and Ranging Global Positioning System)のことを指すが、本稿でも以下同様の扱いをする。

GPSは、地球を中心として回転している複数のGPS衛星から電波を受信し、受信した電波の伝播時間から現在の位置情報を推定する機構である。いわば三角測量を長大な距離で行っていると考えればよい。また受信した電波のドップラーシフト量から速度を推定することも可能である。



いくつかの制約条件として、電波の伝播時間を正確に計測するため、GPS 衛星の軌道は既知である必要がある。加えて、GPS 衛星と受信機の時刻は同期しなければならず、未知量は3次元位置 + 時刻の計4であるため、測位を行うためには4つ以上の衛星が可視である必要がある。

精度は、最低精度でも位置誤差 10m~20m 程度の高い精度を出すことが可能である。精度は測位方式や受信する電波帯、受信条件等によって左右される。

まず測位方式は、以下のように単体測位と、それを発展させた DGPS 等にわけることができる。

- 単体測位

単体測位とは、GPS 衛星が放出する電波のみを利用し測位を行う方式である。電波は電離層や電波の反射 (マルチパス) から影響を受けるため、正しい測量を行えないことがある。従って単体測位ではある程度以上の精度向上は見込めない。

- DGPS

単体測位では得られない電波の誤差情報を他の手段によって取得し測位に反映させる方式がある。これが Differential GPS(DGPS) と呼ばれる方式で、移動体においても誤差数 m 程度という高い精度を出すことが可能となる。この高い精度を利用することによって、複数台の GPS から姿勢を判定することも可能である。DGPS をさらに発展させた方法として、干渉測位を行う RTK(Real Time Kinematic) 測位や高速スタテック測位、VRS-RTK(Virtual Reference Station - RTK) 測位などがある。

電波帯とは、GPS 衛星が放送している電波の帯域のことで、民生に開放されている L1 帯 (1575.42MHz) や軍用利用などの限られたユーザにのみ開放されている L2 帯 (1227.60MHz) などがある。GPS の大きな誤差要因である電離層遅延の効果を、複数の電波帯を受信することによってキャンセルすることが可能となる。

更新周期は、受信電波を処理し測位を行うというバッチ処理的な手法がとられるため、情報の更新は最大でも数 Hz 程度である。

GPS はカーナビなどに組み込まれて数多く民生品として流通しているが、これは L1 電波帯を受信は単体測位を行う簡易的なものであることが多い。従って価格も安く、モジュール単体で1万円程度で入手することが可能である。またこれらは非常に小型、軽量でもあり、中には携帯電話に内蔵できるくらい小型なものも存在する。

一方、航空宇宙分野や精密測位に用いられる GPS は受信機、受信アンテナともそれらに比べると大型で重く、高価 (数百万円程度) である。

なお、捕捉になるが、この他にも航空宇宙分野では電波を利用した航法技術が多数存在する。航空機について言えば、世界的には双曲線測位を行う LORAN(LONG-RANGE Navigation) や、局地的な航法である空港の誘導電波がそれに含まれる。しかしこれらは GPS と異なり、汎用的に利用可能となるほど航空宇宙以外に浸透していない。そのためこれらについては利用を考慮しなかった。

### 1.2.3 磁気コンパス

地球には磁場が存在するため、それを感知することによって姿勢情報を推定することが可能である。この機構を磁気コンパスという。地磁気は場所によって不安定であるため、ある程度以上の精度向上は望めない。また地球を航行する際に利用する地球の自転軸上の北(真北)と、地球の磁場による北(磁北)は異なるため、補正が必要となる。磁気コンパスの中には、磁気を感じ取る半導体センサを利用することによって小型・軽量なものが存在する。

## 1.3 低精度 MEMS センサと汎用 GPS 受信機の融合による INS/GPS

以上、航空宇宙分野の航法技術について見てきたが、汎用的に使用できる航法技術とはどのようなものだろうか。

1. できる限り精度よく位置・姿勢を推定できること。
2. 汎用的に使用できる重量・サイズであること。すなわち、できる限り軽く、小さいこと。
3. システム全体が安価であること。

これらの条件は相反するものであるため、トレードオフを行い数値的な仕様を考えた。本研究で提案する位置・姿勢推定機構は表(1.2)の仕様を満足するものとする。

表 1.2: 本研究で想定する位置・姿勢推定機構の仕様

精度	GPS 利用可能時で最大誤差数 m 以内
重さ	100g 程度
サイズ	W 100 × D 100 × H 100 mm 以内
価格	10 万円程度

この要求から、次に示す INS と GPS を統合した INS/GPS システムを研究対象とすることにした。

- 低精度 MEMS 慣性センサを利用した INS

INS の中でも小型、軽量化が可能なストラップダウン型の INS を用いる。INS を構成する慣性センサには、先にも述べたカーナビなどで使われている小型・安価であるが精度が非常に低い MEMS 慣性センサを利用する。利用する慣性センサは INS を構成するのに必要最低限の種類ならびに個数である、3 軸の MEMS 加速度計、3 軸の MEMS ジャイロとする。

- 民生用 GPS

INS を長時間使用すると慣性センサのランダムドリフトにより精度が悪化することは先にも述べた。そこでそれを補正する目的で GPS を導入する。また、小型、軽量、安価であることに配慮しカーナビなど汎用的に用いられている民生用 GPS を用いることにした。

これをもって本論文は『低精度 MEMS センサと汎用 GPS 受信機の融合による高精度航法システムの研究』と題し、低精度 MEMS センサと汎用 GPS 受信機の融合による INS/GPS が汎用的に利用可能な精度

を有するか、かつ十分に小型軽量安価なシステムを構築できるかを論じていくものとする。

本論文の構成であるが、はじめに本研究の核となる INS/GPS アルゴリズムについて見ていくこととする。INS と GPS、両システムの統合には、互いの長所を生かし短所を補いあう統合方法を導入したい。そのために複数の情報から確率的に最も確からしい情報を抽出する Kalman Filter を利用した。Kalman Filter は他の多くの INS/GPS でも用いられている一般的な手法であり、今までの研究によって十分にその効果が示されている統合方式であり、その詳細を第 2 章で説明する。

しかし Kalman Filter による INS と GPS の統合といってもその詳細は個々の INS/GPS によって異なることが常である。そこで本研究で用いた INS/GPS アルゴリズムを第 3 章で示す。特に本研究で用いた INS/GPS アルゴリズムは Quaternion を積極的に活用したものとなっており、他の INS/GPS で同じアルゴリズムを利用しているものは調べた限りでは存在しない。

そして、提案した手法がどの程度の精度を有するか確認するため、いくつかの数値シミュレーションをコンピュータを利用して行った。その詳細を 4 章に示す。シミュレーションを行う際に MEMS 慣性センサを数値モデル化したが、それについても記す。

またさらに、シミュレーションによって有効性が確認できたので、実際に INS/GPS プロトタイプを作成し、実験を行った。これによって本手法が汎用的に利用するのに十分に高精度であること、また小型軽量安価であることを確認した。実験の詳細、結果については第 5 章で示す。

最後にまとめならびに考察を第 6 章に示す。

## 第 2 章

# Kalman Filter

本研究では INS と GPS を統合した INS/GPS システムを提案するが、両者の統合には複数のシステムから確率的に最も確からしい値を算出するアルゴリズムである Kalman Filter を用いる。Kalman Filter は参考文献 [7] にあるとおり、1960 年代に Kalman によって発見されたものだが、いまだにその工学的な利用価値は高い。本章では、Kalman Filter の詳細を、その導出過程により説明する。

同じ対象を観測して複数の観測データが得られたとき、そのデータから最も確からしい値を求めるには、全ての平均値をとることである。これは最小二乗法としてよく知られる方法であり、対象から得られる情報が真なる値 (真値) と観測ごとに変化するノイズ成分にわけられる経験的事実を適用したものである。いうなれば Kalman Filter とは、その最小二乗法を時間にそって連続的に適用したものである。ゆえに本章では最小二乗法を起点として話を進める。

### 2.1 最小二乗法

$\underline{x}$  なる定数を求めるために観測を行う。その観測値を  $\underline{z}$  とすれば、 $\underline{x}$  と  $\underline{z}$  の関係は次の方程式であらわされる。

$$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{v} \quad (2.1.1)$$

これを観測方程式と呼ぶ。ここで  $\underline{v}$  は誤差であり、平均 0、分散  $R$  の正規白色ノイズを想定することにする。すなわち

$$E[\underline{v}] = 0, \quad E[\underline{v}\underline{v}^T] = R \quad (2.1.2)$$

$\underline{x}$  を  $\underline{z}$  から推定するためには、次の評価関数  $J_{LS}$  を最小にするようにすればよい。

$$J_{LS} = (\underline{z} - H\underline{x})^T (\underline{z} - H\underline{x}) \quad (2.1.3)$$

展開して

$$J_{LS} = \underline{z}^T \underline{z} - \underline{z}^T H\underline{x} - \underline{x}^T H^T \underline{z} + \underline{x}^T H^T H\underline{x} \quad (2.1.4)$$

$\underline{x}$  で偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{LS}}{\partial \underline{x}} &= \underline{0}^T - \underline{z}^T H - (H^T \underline{z})^T + (H^T H\underline{x})^T + \underline{x}^T H^T H \\ &= -2(\underline{z}^T H - \underline{x}^T H^T H) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

さらに  $\underline{x}$  で偏微分して

$$\frac{\partial^2 J_{LS}}{\partial \underline{x}^2} = 2(H^T H) \quad (2.1.6)$$

これより  $\frac{\partial^2 J_{LS}}{\partial \underline{x}^2}$  の要素は正となることから、 $\frac{\partial J_{LS}}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$  となるように  $\underline{x}$  を決めれば  $J_{LS}$  が最小になる。すなわち、最も確からしい  $\underline{x}$  を  $\hat{\underline{x}}$  と書けば (2.1.5) より

$$\underline{z}^T H = \hat{\underline{x}}^T H^T H \quad (2.1.7)$$

$H^T H$  に逆行列が存在するとして、

$$\hat{\underline{x}} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{z} \quad (2.1.8)$$

となる。

この推定値  $\hat{\underline{x}}$  にはいくつかの重要な性質が存在する。

#### 1. 推定誤差 ( $\underline{\varepsilon}$ )

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &\equiv \underline{x} - \hat{\underline{x}} \\ &= \underline{x} - (H^T H)^{-1} H^T \underline{z} \\ &= \underline{x} - (H^T H)^{-1} H^T (H \underline{x} + \underline{v}) \\ &= - (H^T H)^{-1} H^T \underline{v} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

#### 2. 残差 (計測値と推定値の差、 $\underline{v}$ )

$$\begin{aligned} \underline{v} &\equiv \underline{z} - \hat{\underline{z}} \\ &= H(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) + \underline{v} \\ &= H \underline{\varepsilon} + \underline{v} \\ &= (I - H(H^T H)^{-1} H^T) \underline{v} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

#### 3. 推定誤差平均

$$\begin{aligned} E[\underline{\varepsilon}] &= E\left[-(H H^T)^{-1} H^T \underline{v}\right] \\ &= -(H H^T)^{-1} H^T E[\underline{v}] \\ &= \underline{0} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

#### 4. 推定誤差共分散 ( $P$ )

$$\begin{aligned} P &\equiv E[\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T] \\ &= E\left[(\underline{x} - \hat{\underline{x}})(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T\right] \\ &= E\left[\left((H^T H)^{-1} H^T \underline{v}\right) \left((H^T H)^{-1} H^T \underline{v}\right)^T\right] \\ &= (H^T H)^{-1} H^T E[\underline{v} \underline{v}^T] H \left((H^T H)^{-1}\right)^T \\ &= (H^T H)^{-1} H^T R H \left((H^T H)^{-1}\right)^T \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

## 2.2 重み付き最小二乗法

前節の最小二乗法を拡張して、ここでは重み付き最小二乗法を考える。『重み付き』とは観測ごとに確からしさが異なることに対応する。

ここでは観測方程式は (2.1.1) と同じである。このとき  $\underline{x}$  を  $\underline{z}$  から推定するためには、次の評価関数  $J_{\text{WLS}}$  を最小にするようにすればよい。ここで  $W$  は『重み』をあらわす対称行列  $W^T = W$  である。

$$J_{\text{WLS}} = (\underline{z} - H\underline{x})^T W (\underline{z} - H\underline{x}) \quad (2.2.1)$$

展開して

$$J_{\text{WLS}} = \underline{z}^T W \underline{z} - \underline{x}^T H^T W \underline{z} - \underline{z}^T W H \underline{x} + \underline{x}^T H^T W H \underline{x} \quad (2.2.2)$$

$\underline{x}$  で偏微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \underline{x}} &= -\underline{z}^T W H - \underline{z}^T W H + \underline{x}^T H^T W H + \underline{x}^T H^T W H \\ &= -2(\underline{z}^T W H - \underline{x}^T H^T W H) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

よって評価関数  $J_{\text{WLS}}$  を最小または最大にする  $\underline{x}$  を  $\hat{\underline{x}}$  とすれば

$$\underline{z}^T W H = \hat{\underline{x}}^T H^T W H \quad (2.2.4)$$

すなわち

$$\hat{\underline{x}} = (H^T W H)^{-1} H^T W \underline{z} \quad (2.2.5)$$

ここで  $W \rightarrow R^{-1}$  なる置き換えを適用すると、重み付き最小二乗法における性質は次のとおり導かれる。

### 1. 推定誤差 ( $\underline{\varepsilon}$ )

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &\equiv \underline{x} - \hat{\underline{x}} \\ &= \underline{x} - (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{z} \\ &= \underline{x} - (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} (H \underline{x} + \underline{v}) \\ &= - (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{v} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

### 2. 推定誤差共分散 ( $P$ )

$$\begin{aligned} P &\equiv E \left[ \left( (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{v} \right) \left( (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{v} \right)^T \right] \\ &= E \left[ \left( (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{v} \right) \left( \underline{v}^T R^{-1} H (H^T R^{-1} H)^{-1} \right) \right] \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} E [\underline{v} \underline{v}^T] R^{-1} H (H^T R^{-1} H)^{-1} \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} R R^{-1} H (H^T R^{-1} H)^{-1} \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} (H^T R^{-1} H) (H^T R^{-1} H)^{-1} \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

## 2.3 再帰的重み付き最小二乗法

前節の重み付き最小二乗法で、観測方程式は (2.1.1) であったが、これを成分ごとに書き下すと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

最も確からしい推定値を  $\hat{x}_m$  書くと、これは (2.2.5) より (すでに  $W \rightarrow R^{-1}$  の置き換えをしたものとして)

$$\hat{x}_m = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{z} \quad (2.3.2)$$

また、推定誤差共分散を  $P_m$  と書くと、(2.2.7) より

$$P_m = (H^T R^{-1} H)^{-1} \quad (2.3.3)$$

$P_m$  を用いて  $\hat{x}_m$  を書けば

$$\hat{x}_m = P_m H^T R^{-1} \underline{z} \quad (2.3.4)$$

今、あらたに観測値  $z_{m+1}$  が得られたとすると

$$\begin{pmatrix} \underline{z} \\ z_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} \underline{v} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

新しい観測値が得られたことによって、推定値  $\hat{x}_{m+1}$  は、観測値が得られる前の推定値  $\hat{x}_m$  に対して

$$\hat{x}_{m+1} = \hat{x}_m + \Delta \underline{x} \quad (2.3.6)$$

で求められれば、再帰的に次々とあらたな観測値が得られることによって推定値を更新していくことが可能となる。

ところで  $\hat{x}_{m+1}$  は、評価関数 (2.2.1) を書き直して次の評価関数  $J_{RWLS}$  を最小にするものである。

$$J_{RWLS} = \left( \begin{pmatrix} \underline{z} \\ z_{m+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{pmatrix} x_{m+1} \right)^T \begin{bmatrix} R^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & r^{-1} \end{bmatrix} \left( \begin{pmatrix} \underline{z} \\ z_{m+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{pmatrix} x_{m+1} \right) \quad (2.3.7)$$

ここで『重み』に相当する行列  $\begin{bmatrix} R^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & r^{-1} \end{bmatrix}$  において最終行および最終列が対角成分以外 0 となっているのは、加わった観測がそれまでの観測との相関関係がないことを示している。(2.2.5) にならえば、この評価関数を最小にする推定値  $\hat{x}_{m+1}$  は

$$\begin{aligned} \hat{x}_{m+1} &= \left( \begin{pmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} R^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & r^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} R^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & r^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z} \\ z_{m+1} \end{pmatrix} \\ &= (H^T R^{-1} H + \underline{h} r^{-1} \underline{h}^T)^{-1} (H^T R^{-1} \underline{z} + \underline{h} r^{-1} z_{m+1}) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

同様に (2.2.7) にらえば、推定誤差共分散  $P_{m+1}$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 P_{m+1} &= \left( \begin{pmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} R^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & r^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H \\ \underline{h}^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \\
 &= (H^T R^{-1} H + \underline{h} r^{-1} \underline{h}^T)^{-1} \\
 &= (P_m + \underline{h} r^{-1} \underline{h}^T)^{-1} \\
 &= P_m - P_m \underline{h} (\underline{h}^T P_m \underline{h} + r)^{-1} \underline{h}^T P_m
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

最後の式変形においては以下の公式を用いた。

$$\begin{aligned}
 A^{-1} = B^{-1} + C^T D^{-1} C \quad \text{のとき} \quad (D + CBC^T)^{-1} \quad \text{が存在するなら} \\
 A = B - BC^T (D + CBC^T)^{-1} CB
 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

ここで

$$k_m \equiv P_m \underline{h} (\underline{h}^T P_m \underline{h} + r)^{-1} \tag{2.3.11}$$

なる  $k_m$  を用いれば

$$P_{m+1} = (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) P_m \tag{2.3.12}$$

ここで (2.3.8) に立ち返ってみれば

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{m+1} &= P_{m+1} (H^T R^{-1} \underline{z} + \underline{h} r^{-1} z_{m+1}) \\
 &= (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) P_m (H^T R^{-1} \underline{z} + \underline{h} r^{-1} z_{m+1}) \\
 &= (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) \hat{x}_m + (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) P_m \underline{h} r^{-1} z_{m+1} \\
 &= (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) \hat{x}_m + \left( I - P_m \underline{h} (\underline{h}^T P_m \underline{h} + r)^{-1} \underline{h}^T \right) \underline{k}_m (\underline{h}^T P_m \underline{h} + r) r^{-1} z_{m+1} \\
 &= (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) \hat{x}_m + \frac{(\underline{h}^T P_m \underline{h} + r) I - P_m \underline{h} \underline{h}^T}{\underline{h}^T P_m \underline{h} + r} \underline{k}_m (\underline{h}^T P_m \underline{h} + r) r^{-1} z_{m+1} \\
 &\quad (\because \underline{h}^T P_m \underline{h} + r \text{ はスカラー}) \\
 &= (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) \hat{x}_m + r \underline{k}_m r^{-1} z_{m+1} \\
 &= (I - \underline{k}_m \underline{h}^T) \hat{x}_m + \underline{k}_m z_{m+1} \\
 &= \hat{x}_m + \underline{k}_m (z_{m+1} - \underline{h}^T \hat{x}_m)
 \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

これは (2.3.6) の形をしている。つまり、観測値があたらに得られたら以上の手順を繰り返し行い  $\hat{x}$  を更新していけばよい。観測値が複数の場合は  $z_{m+1} \rightarrow \underline{z}_{m+1}$  および  $\underline{h} \rightarrow H$  とすればよい。

## 2.4 離散系 Kalman Filter

離散線形系では真値  $\underline{x}$  についてステップ間で次の関係式 (システム方程式) が成り立つ。

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \underline{x}_k + \Gamma_k \underline{u}_k + \underline{w}_k \tag{2.4.1}$$



ここで  $\underline{u}_k$  はシステムへの入力である。また、 $\underline{w}_k$  は時間的に相関関係がなく平均が0のホワイトノイズである。すなわちその平均、分散は

$$E[\underline{w}_k] = \underline{0} \quad (2.4.2)$$

$$E[\underline{w}_k \underline{w}_k^T] \equiv S_k \quad (2.4.3)$$

と表わせられる。

一方、最も確からしい推定値  $\hat{\underline{x}}$  と平均0のホワイトノイズを含んだ観測された入力  $\bar{\underline{u}}$  から予測される次ステップの値  $\bar{\underline{x}}$  は

$$\bar{\underline{x}}_{k+1} \equiv \Phi_{k+1,k} \hat{\underline{x}}_k + \Gamma_k \bar{\underline{u}}_k \quad (2.4.4)$$

である。

ところで、観測された入力  $\bar{\underline{u}}$  と実際の入力  $\underline{u}$  の差  $\underline{\delta}$  を

$$\underline{\delta}_k \equiv \bar{\underline{u}}_k - \underline{u}_k \quad (2.4.5)$$

表すことにする。先の定義より、その平均、分散は

$$E[\underline{\delta}_k] = \underline{0} \quad (2.4.6)$$

$$E[\underline{\delta}_k \underline{\delta}_k^T] = Q_k \quad (2.4.7)$$

となるものとする。すると、推定値  $\hat{\underline{x}}$  と真値  $\underline{x}$  の残差  $\hat{\underline{\epsilon}}$

$$\hat{\underline{\epsilon}}_k \equiv \hat{\underline{x}}_k - \underline{x}_k \quad (2.4.8)$$

について、次ステップにおける残差  $\bar{\underline{\epsilon}}_{k+1}$  を考えると

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\epsilon}}_{k+1} &\equiv \bar{\underline{x}}_{k+1} - \underline{x}_{k+1} \\ &= (\Phi_{k+1,k} \hat{\underline{x}}_k + \Gamma_k \bar{\underline{u}}_k) - (\Phi_{k+1,k} \underline{x}_k + \Gamma_k \underline{u}_k + \underline{w}_k) \\ &= \Phi_{k+1,k} \hat{\underline{\epsilon}}_k + \Gamma_k \underline{\delta}_k - \underline{w}_k \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

であり、その期待値  $E[\bar{\underline{\epsilon}}_{k+1}]$  は

$$\begin{aligned} E[\bar{\underline{\epsilon}}_{k+1}] &= E[\bar{\underline{x}}_{k+1} - \underline{x}_{k+1}] \\ &= \Phi_{k+1,k} E[\hat{\underline{\epsilon}}_k] + \Gamma_k E[\underline{\delta}_k] - E[\underline{w}_k] \\ &= \underline{0} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

でゼロとなる。共分散  $\bar{P}_{k+1}$  は

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &\equiv E[\bar{\underline{\epsilon}}_{k+1} \bar{\underline{\epsilon}}_{k+1}^T] \\ &= E[(\Phi_{k+1,k} \hat{\underline{\epsilon}}_k + \Gamma_k \underline{\delta}_k - \underline{w}_k) (\Phi_{k+1,k} \hat{\underline{\epsilon}}_k + \Gamma_k \underline{\delta}_k - \underline{w}_k)^T] \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

ここで  $\underline{\delta}_k$ ,  $\underline{w}_k$ ,  $\hat{\underline{\epsilon}}_k$  が互いに無関係であることより

$$E[\underline{\delta}_k \underline{w}_k^T] = E[\underline{w}_k \hat{\underline{\epsilon}}_k^T] = E[\hat{\underline{\epsilon}}_k \underline{\delta}_k^T] = \underline{0} \quad (2.4.12)$$

であるから、(2.4.11) に代入すると  $\bar{P}_{k+1}$  は

$$\bar{P}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \hat{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T + S_k \quad (2.4.13)$$

と書くことができる。

次に真値  $\underline{x}_{k+1}$  に関する観測値  $\underline{z}_{k+1}$  が得られたとする。すなわち次の関係式 (観測方程式) が成り立つ。

$$\underline{z}_{k+1} = H_{k+1}\underline{x}_{k+1} + \underline{v}_{k+1} \quad (2.4.14)$$

ここで  $\underline{v}_{k+1}$  は観測誤差であり、平均が 0、分散が  $R_{k+1}$ 、すなわち

$$E[\underline{v}_{k+1}] = 0, \quad E[\underline{v}_{k+1}\underline{v}_{k+1}^T] \equiv R_{k+1} \quad (2.4.15)$$

であるものとする。

このとき  $\underline{x}_{k+1}$  の最も確からしい値  $\hat{\underline{x}}_{k+1}$  は前節の結論から次のように書くことができる。

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = \bar{\underline{x}}_{k+1} + K_{k+1} [\underline{z}_{k+1} - H_{k+1}\bar{\underline{x}}_{k+1}] \quad (2.4.16)$$

ここで

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1}H_{k+1}^T (H_{k+1}\bar{P}_{k+1}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.4.17)$$

である。この推定値  $\hat{\underline{x}}_{k+1}$  と真値  $\underline{x}_{k+1}$  の残差  $\hat{\underline{e}}_{k+1}$  は

$$\hat{\underline{e}}_{k+1} = \underline{x}_{k+1} + \hat{\underline{e}}_{k+1} \quad (2.4.18)$$

であるから (2.4.4) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} + \hat{\underline{e}}_{k+1} &= \hat{\underline{x}}_{k+1} \\ &= \bar{\underline{x}}_{k+1} + K_{k+1} [\underline{z}_{k+1} - H_{k+1}\bar{\underline{x}}_{k+1}] \\ &= [I - K_{k+1}H_{k+1}]\bar{\underline{x}}_k + K_{k+1}\underline{z}_{k+1} \\ &= [I - K_{k+1}H_{k+1}] (\Phi_{k+1,k}\hat{\underline{x}}_k + \Gamma_k\bar{\underline{u}}_k) \\ &\quad + K_{k+1} [H_{k+1}\underline{x}_{k+1} + \underline{v}_{k+1}] \\ &= [I - K_{k+1}H_{k+1}] (\underline{x}_{k+1} + \Phi_{k+1,k}\hat{\underline{e}}_k + \Gamma_k\underline{\delta}_k + \underline{w}_k) \\ &\quad + K_{k+1} [H_{k+1}\underline{x}_{k+1} + \underline{v}_{k+1}] \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

よって

$$\hat{\underline{e}}_{k+1} = [I - K_{k+1}H_{k+1}] (\Phi_{k+1,k}\hat{\underline{e}}_k + \Gamma_k\underline{\delta}_k + \underline{w}_k) + K_{k+1}\underline{v}_{k+1} \quad (2.4.20)$$

対応する共分散  $\hat{P}_{k+1}$  は

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k+1} &= E[\hat{\underline{e}}_{k+1}\hat{\underline{e}}_{k+1}^T] \\ &= [I - K_{k+1}H_{k+1}] (\Phi_{k+1,k}\hat{P}_k\Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T + S_k) [I - K_{k+1}H_{k+1}]^T \\ &\quad + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

(2.4.13) を用いれば

$$\hat{P}_{k+1} = [I - K_{k+1}H_{k+1}]\bar{P}_{k+1}[I - K_{k+1}H_{k+1}]^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \quad (2.4.22)$$

となる。さらに添え字を省略して (2.4.17) を考えれば

$$\begin{aligned}
\hat{P} &= [I - KH] \bar{P} [I - KH]^T + KRK^T \\
&= \bar{P} - KH\bar{P} - \bar{P}H^TK^T + KH\bar{P}H^TK^T + KRK^T \\
&= \bar{P} - \bar{P}H^T (H\bar{P}H^T + R)^{-1} H\bar{P} - \bar{P}H^T ()^{-1} H\bar{P} \\
&\quad + \bar{P}H^T ()^{-1} H\bar{P}H^T ()^{-1} H\bar{P} + \bar{P}H^T ()^{-1} R ()^{-1} H\bar{P} \\
&= \bar{P} - \bar{P}H^T ()^{-1} H\bar{P} - \bar{P}H^T ()^{-1} H\bar{P} + \bar{P}H^T ()^{-1} ()^{-1} H\bar{P} \\
&= \bar{P} - \bar{P}H^T (H\bar{P}H^T + R)^{-1} H\bar{P} \\
&= [I - KH] \bar{P}
\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

以上より離散系に対する式が得られたが、これが離散系に対する標準的な Kalman Filter である。整理して書けば

- 時間更新するとき (Time Update)

$$\bar{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \hat{x}_k + \Gamma_k \bar{u}_k \tag{2.4.4}$$

$$\bar{P}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \hat{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T + S_k \tag{2.4.13}$$

- 観測量を用いて修正するとき (Measurement Update)

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + K_{k+1} [z_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1}] \tag{2.4.16}$$

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T (H_{k+1} \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{2.4.17}$$

$$\hat{P}_{k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] \bar{P}_{k+1} \tag{2.4.23}$$

## 2.5 離散系 Kalman Filter の連続系への適用

前節で述べた離散系 Kalman Filter は、その想定する系が (2.4.4) に表されるように離散系である。ここで次の連続線形系

$$\frac{d}{dt} \underline{x} \equiv \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \tag{2.5.1}$$

の  $\Delta t$  あたりの  $\underline{x}$  の微小変化  $\Delta \underline{x}$  を考えると、微分の定義から

$$\Delta \underline{x} \approx A \Delta t \underline{x} + B \Delta t \underline{u} \tag{2.5.2}$$

従って

$$\underline{x} + \Delta \underline{x} = (I + A \Delta t) \underline{x} + B \Delta t \underline{u} \tag{2.5.3}$$

これと (2.4.4) を比較すれば

$$\Phi_{k+1,k} = I + A \Delta t \tag{2.5.4}$$

$$\Gamma_k = B \Delta t \tag{2.5.5}$$

とすれば離散系 Kalman Filter を連続線形系へ適用できる。

## 2.6 離散 Extended Kalman Filter

Kalman Filter を非線形系に適用するための最も一般的な手法が Extended Kalman Filter である。Extended Kalman Filter は非線形系を線形化することによって、線形系で成り立つ Kalman Filter を適用したものである。ここでは離散 Extended Kalman Filter を導出する。

離散非線形系では真値  $\underline{x}_k$  についてステップ間で次の関係式 (システム方程式) が成り立つ。

$$\underline{x}_{k+1} = f_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k) + \underline{w}_k \quad (2.6.1)$$

また確からしい値  $\hat{x}_k$  から求まる次ステップの推定値  $\bar{x}_{k+1}$  は

$$\bar{x}_{k+1} = f_k(\hat{x}_k, \bar{u}_k) \quad (2.6.2)$$

ところで式 (2.6.1) は線形化を行うと

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= f_k(\hat{x}_k + (\underline{x}_k - \hat{x}_k), \bar{u}_k + (\underline{u}_k - \bar{u}_k)) + \underline{w}_k \\ &\approx f_k(\hat{x}_k, \bar{u}_k) + \left. \frac{\partial f_k}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{x}_k, \bar{u}_k} (\underline{x}_k - \hat{x}_k) + \left. \frac{\partial f_k}{\partial \underline{u}} \right|_{\hat{x}_k, \bar{u}_k} (\underline{u}_k - \bar{u}_k) + \underline{w}_k \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

であるから、これと式 (2.6.2) を辺々引くと

$$(\bar{x}_{k+1} - \underline{x}_{k+1}) = \left. \frac{\partial f_k}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{x}_k, \bar{u}_k} (\hat{x}_k - \underline{x}_k) + \left. \frac{\partial f_k}{\partial \underline{u}} \right|_{\hat{x}_k, \bar{u}_k} (\bar{u}_k - \underline{u}_k) - \underline{w}_k \quad (2.6.4)$$

この式は離散線形系であるから、離散系 Kalman Filter の Time Update の式 (2.4.13) が適用でき、Time Update におけるシステムの誤差共分散行列  $P$  の変化は

$$\bar{P}_{k+1} = \Gamma_k \hat{P}_k \Gamma_k^T + \Phi_k Q_k \Phi_k^T + S_k \quad (2.6.5)$$

と表わすことができる。ただし、

$$\hat{P}_k = E \left[ (\hat{x}_k - x_k) (\hat{x}_k - x_k)^T \right] \quad (2.6.6)$$

$$\bar{P}_{k+1} = E \left[ (\bar{x}_{k+1} - x_{k+1}) (\bar{x}_{k+1} - x_{k+1})^T \right] \quad (2.6.7)$$

$$Q_k = E \left[ (\bar{u}_k - u_k) (\bar{u}_k - u_k)^T \right] \quad (2.6.8)$$

$$S_k = E \left[ w_k w_k^T \right] \quad (2.6.9)$$

であり、行列  $\Gamma_k, \Phi_k$  は Jacobian、すなわち

$$\Gamma_k \equiv \left. \frac{\partial f_k}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{x}_k, \bar{u}_k} \quad (2.6.10)$$

$$\Phi_k \equiv \left. \frac{\partial f_k}{\partial \underline{u}} \right|_{\hat{x}_k, \bar{u}_k} \quad (2.6.11)$$

である。

一方、観測量  $z_{k+1}$  は非線形系においては

$$z_{k+1} = h_{k+1}(x_{k+1}) + v_{k+1} \quad (2.6.12)$$

のように得られる (観測方程式)。同様に線形化を行うと

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= h_{k+1}(\bar{x}_{k+1} + (x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})) + v_{k+1} \\ &\approx h_{k+1}(\bar{x}_{k+1}) + \left. \frac{\partial h_{k+1}}{\partial x} \right|_{\bar{x}_{k+1}} (x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}) + v_{k+1} \\ &\equiv h_{k+1}(\bar{x}_{k+1}) + H_{k+1}(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}) + v_{k+1} \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

ただし行列  $H_{k+1}$  は Jacobian、すなわち

$$H_{k+1} \equiv \left. \frac{\partial h_{k+1}}{\partial x} \right|_{\bar{x}_{k+1}} \quad (2.6.14)$$

ここで  $z_{k+1} - h_{k+1}(\bar{x}_{k+1})$  を新たな観測量として見る、すなわち

$$\underbrace{z_{k+1} - h_{k+1}(\bar{x}_{k+1})}_{\text{観測量}} = H_{k+1}(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}) + v_{k+1} \quad (2.6.15)$$

とすると今までの議論が成り立ち、離散線形系 Kalman Filter の Measurement Update の式 (2.4.16), (2.4.17), (2.4.23) から

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + K_{k+1}(z_{k+1} - h_{k+1}(\bar{x}_{k+1})) \quad (2.6.16)$$

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T (H_{k+1} \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.6.17)$$

$$\hat{P}_{k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) \bar{P}_{k+1} \quad (2.6.18)$$

となる。ただし、

$$R_{k+1} = E[v_{k+1} v_{k+1}^T] \quad (2.6.19)$$

である。

以上まとめると、離散 Extended Kalman Filter は

- 時間更新するとき (Time Update)

$$\bar{x}_{k+1} = f_k(\hat{x}_k, \bar{u}_k) \quad (2.6.2)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \Gamma_k \hat{P}_k \Gamma_k^T + \Phi_k Q_k \Phi_k^T + S_k \quad (2.6.5)$$

- 観測量を用いて修正するとき (Measurement Update)

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + K_{k+1}(z_{k+1} - h_{k+1}(\bar{x}_{k+1})) \quad (2.6.16)$$

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T (H_{k+1} \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.6.17)$$

$$\hat{P}_{k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) \bar{P}_{k+1} \quad (2.6.18)$$

## 2.7 UD 分解 Kalman Filter

具体的に数値計算によって Kalman Filter を形成する場合には、演算精度によって Filter が発散する可能性があるが知られている。特に式 (2.4.16) において Kalman Gain ( $K$ ) を計算する際に逆行列を計算するが、数値演算の精度が十分でない場合に桁落ちが発生し Filter が不安定になる。

そのような数値演算によってもたらされる Filter の不安定性について、参考文献 [3] 等で、計算の工夫により桁落ちの可能性を抑え安定性を増す手法がいくつか提案されている。そのうちの 1 つに、誤差共分散行列 ( $P, Q, R$ ) の対象性に注目した UD 分解 Kalman Filter というものがある。

### 2.7.1 UD 分解

実対象行列  $A$  は次のように分解することが可能である。

$$A = UDU^T \quad (2.7.1)$$

ここで  $U$  は上三角行列、 $D$  は対角行列であり、これらは以下の手順で導き出される。

```

1  for(int i = A.row - 1; i >= 0; i--){
2      D(i, i) = A(i, i);
3      U(i, i) = 1.0;
4      for(int j = 0; j < i; j++){
5          U(j, i) = A(j, i) / D(i, i);
6          for(int k = 0; k <= j; k++){
7              A(k, j) -= U(k, i) * D(i, i) * U(j, i);
8          }
9      }
10 }
```

このことを利用すると、Kalman Filter の式はシステムの誤差共分散行列  $P$  を UD 分解した行列  $U_P, D_P$  に対する演算として書き直すことができ、逆行列の計算を排除することが可能となる。以下、Time Update と Measurement Update のそれぞれについて見ていくことにする。

### 2.7.2 Time Update

Time Update では、システムの誤差共分散行列  $P$  を式 (2.4.13) によって更新する。ここで  $S = 0$  とし、 $P, Q$  が実対象行列であることに着目すると、

$$\begin{aligned}
 \bar{P} &\equiv U_{\bar{P}} D_{\bar{P}} U_{\bar{P}}^T \\
 &= \Phi \hat{P} \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \\
 &\equiv \Phi U_{\hat{P}} D_{\hat{P}} U_{\hat{P}}^T \Phi^T + \Gamma U_Q D_Q U_Q^T \Gamma^T \\
 &= [\Phi U_{\hat{P}} \quad \Gamma U_Q] \begin{bmatrix} D_{\hat{P}} & 0 \\ 0 & D_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\hat{P}}^T \Phi^T \\ U_Q^T \Gamma^T \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

すなわち、

$$W \equiv [\Phi U_{\hat{P}} \quad \Gamma U_Q] \quad (2.7.3)$$

$$F \equiv \begin{bmatrix} D_{\hat{P}} & 0 \\ 0 & D_Q \end{bmatrix} \quad (2.7.4)$$

とすると

$$U_{\hat{P}} D_{\hat{P}} U_{\hat{P}}^T = W F W^T \quad (2.7.5)$$

さらにここで  $W, F$  に対して Gram-Schmidt 直交化を行うと  $U_{\hat{P}}, D_{\hat{P}}$  に対する更新の式を得ることができる。具体的には以下の処理を行う。

```

1  for(int j = W.rows - 1; j > 0; j--){
2    v = W.rowVector(j);
3    z = v * F;
4
5    D_P(j, j) = (z * v.transpose()(0, 0));
6    for(int i = 0; i < j; i++){
7      U_P(i, j) = (W.rowVector(i) * z.transpose()(0, 0) / D_P(j, j));
8      W.rowVector(i) -= U_P(i, j) * v;
9    }
10 }
11 D_P(0, 0) = (W.rowVector(0) * F * W.rowVector(0).transpose()(0, 0));

```

### 2.7.3 Measurement Update

一方、Measurement Update では、システムの誤差共分散行列  $P$  を式 (2.4.17), (2.4.23) によって更新する。同じく  $P, R$  の対象性に注目し、式 (2.4.23) を UD 分解した状態で更新することを考える。

まず、式 (2.4.23) において観測量が単一であった場合、すなわち  $H = \underline{h}^T$  であった場合を考えると、

$$\hat{P} = \bar{P} - \frac{1}{\alpha} \bar{P} \underline{h} \underline{h}^T \bar{P} \quad (2.7.6)$$

ただし

$$\alpha \equiv \underline{h}^T \bar{P} \underline{h} + R \quad (2.7.7)$$

UD 分解を施すと

$$\begin{aligned} U_{\hat{P}} D_{\hat{P}} U_{\hat{P}}^T &= U_{\bar{P}} D_{\bar{P}} U_{\bar{P}}^T - \frac{1}{\alpha} U_{\bar{P}} D_{\bar{P}} U_{\bar{P}}^T \underline{h} \underline{h}^T U_{\bar{P}} D_{\bar{P}} U_{\bar{P}}^T \\ &= U_{\bar{P}} \left[ D_{\bar{P}} - \frac{1}{\alpha} D_{\bar{P}} U_{\bar{P}}^T \underline{h} \underline{h}^T U_{\bar{P}} D_{\bar{P}} \right] U_{\bar{P}}^T \\ &\equiv U_{\bar{P}} \left[ D_{\bar{P}} - \frac{1}{\alpha} \underline{g} \underline{g}^T \right] U_{\bar{P}}^T \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

ただし

$$\underline{f} = U_{\bar{P}}^T \underline{h} \quad (2.7.9)$$

$$\underline{g} = D_{\bar{P}} \underline{f} \quad (2.7.10)$$

ここで  $D_{\bar{P}} - \frac{1}{\alpha} \underline{g} \underline{g}^T$  は非不定値対象行列であるから、これについても UD 分解が可能でありそれを

$$D_{\bar{P}} - \frac{1}{\alpha} \underline{g} \underline{g}^T \equiv U' D' U' \quad (2.7.11)$$

とすると、

$$U_{\hat{P}} = U_{\bar{P}} U' \quad (2.7.12)$$

$$D_{\hat{P}} = D' \quad (2.7.13)$$

となり UD 分解した状態での更新式が得られる。また、Kalman Gain は

$$\begin{aligned} \underline{k} &= \frac{1}{\alpha} \bar{P} \underline{h} \\ &= \frac{1}{\alpha} U_{\bar{P}} D_{\bar{P}} U_{\bar{P}}^T \underline{h} \\ &= \frac{1}{\alpha} U_{\hat{P}} \underline{g} \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

で計算される。

以上を踏まえると具体的には以下の処理を行えばよい。

```

1  for(int i = 0; i < R.rows; i++){
2      f = U.transpose() * H.rowVector(i);
3      g = D * f;
4      alpha = R(i, i) + f * g;
5      K(0, i) = g(0, 0);
6      D(0, 0) *= (r / alpha);
7
8      for(int j = 1; j < f.rows; j++){
9          _alpha = alpha + f(j, 0) * g(j, 0);
10         D(j, j) *= (alpha / _alpha);
11         lambda = f(j, 0) / alpha;
12         _u = U.columnVector(j).copy();
13         U.columnVector(j) -= lambda * K.columnVector(i);
14         K.columnVector(i) += g(j, 0) * _u;
15         alpha = _alpha;
16     }
17     K.columnVector(k) /= alpha;
18 }

```



## 第 3 章

# Quaternion を利用した INS/GPS アルゴリズム

本章では研究対象である INS/GPS のアルゴリズムについて述べる。まず記号ならびに座標系の定義を行う。次に INS と GPS の Kalman Filter による統合手法について、そして Kalman Filter で要求されるシステム方程式、観測方程式について順に述べる。その後、これまでに述べたことをまとめて本研究で用いた INS/GPS アルゴリズムを示す。最後にこのアルゴリズムを運用する上での注意点がいくつかあるので、それについて述べる。

### 3.1 記号ならびに座標系について

本章では数式を表記するにあたって以下の記号を用いる。3次元ベクトルは  $\vec{u}$ 、Quaternion は  $\tilde{q}$  または  $\left\{ \begin{array}{l} q(\text{スカラー要素}) \\ \vec{q}(\text{ベクトル要素}) \end{array} \right\}$  のように表し、 $\tilde{q}^* \equiv \left\{ \begin{array}{l} q \\ -\vec{q} \end{array} \right\}$  は共役 Quaternion を表す。Quaternion の演算については、付録 A で述べる。

また添え字を次のように定義する。座標系を  $x$ -Frame のように表わすと、 $u_1^2$  は 1-Frame における値を 2-Frame で観測した値であり、 $u_{1/2}^3$  は 2-Frame に対する 1-Frame の値を 3-Frame で観測した値である。

座標系は表 3.1、図 3.1 にあげる 5 座標系を用いる。各座標系の詳細、座標系間の変換については付録 B で述べる。

表 3.1: 座標系の種類

座標系	説明
$i$ -Frame	地球中心が原点、 $Z_i$ が地球回転軸に一致する、右手系直交慣性系座標系
$e$ -Frame	地球中心が原点、 $X_e$ が経度 $0^\circ$ 方向、 $Z_e$ が地球回転軸の右手系直交座標系
$g$ -Frame	観測点が原点、 $X_g \equiv N_g$ が北方向、 $Z_g \equiv D_g$ が重力方向の右手系直交座標系
$n$ -Frame	$g$ -Frame を $Z_g$ を軸に Azimuth $\alpha$ rad だけ回転した右手系直交座標系
$b$ -Frame	観測点が原点、観測対象に固定された右手系直交座標系

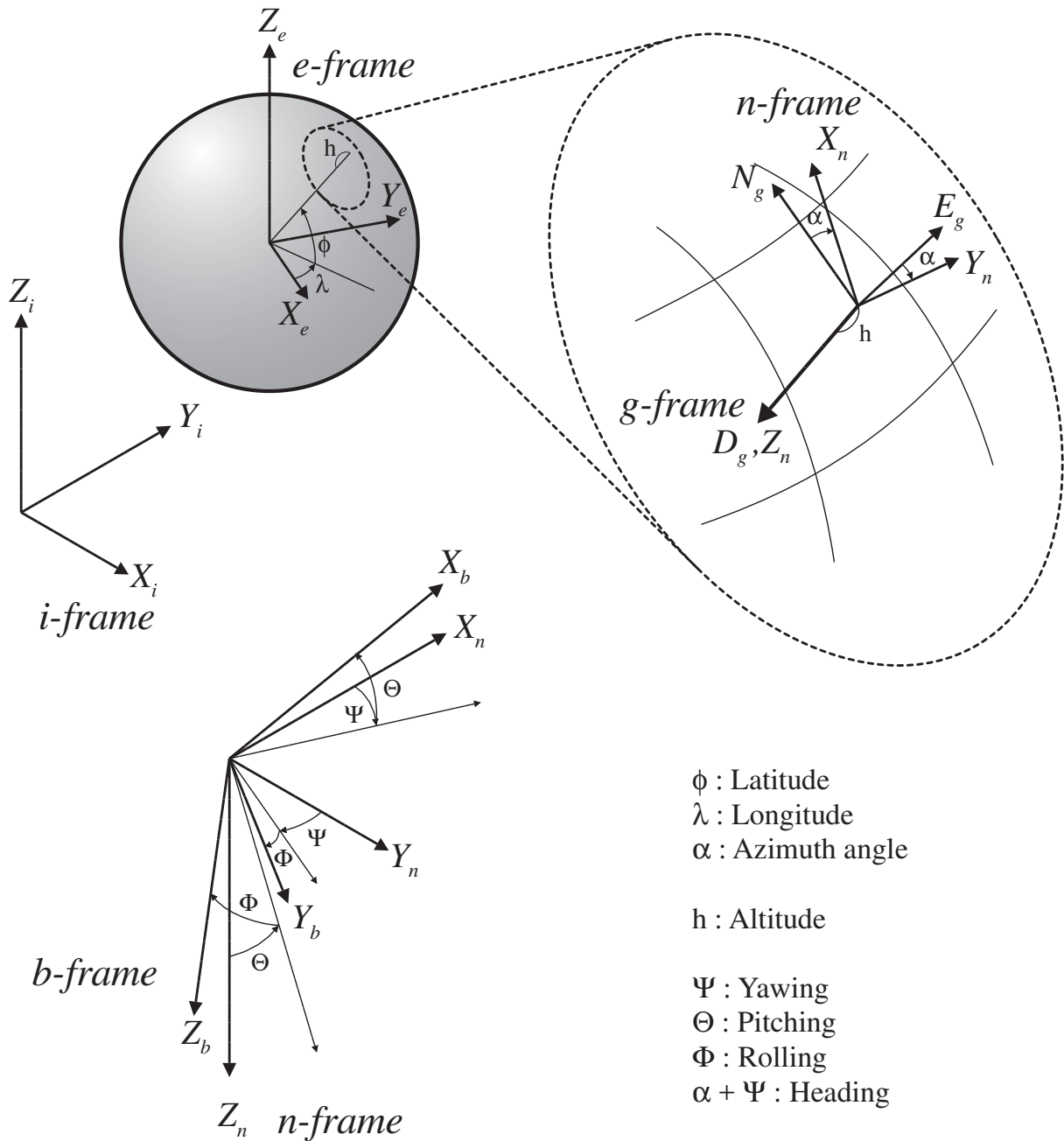


図 3.1: 座標系

以上を踏まえて、数式中に表れる代表的な記号を表 3.2 にまとめる。

### 3.2 INS と GPS の統合方式

INS と GPS の統合に第 2 章で説明した Kalman Filter を用いることは既に述べたが、INS と GPS を Kalman Filter を統合するには大きくわけて次の 2 つの方法が存在する。

表 3.2: 代表的な記号

記号	説明	要素数
$\vec{u}$	= 一般的な 3 次元ベクトル	
$\tilde{q}$	= 一般的な Quaternion	
$\tilde{q}^*$	= 共役 Quaternion	
$\vec{r}_e$	= 地球中心から観測点までの 3 次元ベクトル	
$\dot{\vec{r}}_e^n$	= 地球を基準としたときの観測点の速さを $n$ -Frame で測定した値	3
$\vec{a}^b$	= 観測対象に固定された加速度計の理想的な出力、 $\vec{a}_i^b$ の省略形	3
$\vec{\omega}_{e/i}^e$	= 地球の回転を $e$ -Frame で計測した値	3
$\vec{\omega}_{n/e}^n$	= 観測対象の地球に対する回転を $n$ -Frame で測定した値	3
$\vec{\omega}_{b/i}^b$	= 観測対象に固定されたジャイロの理想的な出力	3
$\vec{g}^n$	= 重力を $n$ -Frame で計測した値、 $\vec{g}_i^n$ の省略形	3
$h$	= 高度	1
$\tilde{q}_e^n$	= 地球上の位置、すなわち緯度、経度、アジムス角の Quaternion 表現	4
$\tilde{q}_n^b$	= 観測対象の姿勢、すなわちロール角、ヨー角、ピッチ角の Quaternion 表現	4

- Loose coupling

Kalman Filter におけるシステム方程式が INS の慣性航法方程式、観測方程式が GPS から出力される位置・速度によって構成される方式。GPS 受信機が受信した電波を処理することによって得られる最終出力である位置・速度を補強情報として利用するため、GPS によって解が得られる状況、つまり未知量の 3 次元位置、時刻の計 4 を解くために必要な 4 衛星以上が可視である必要がある。かわりに統合のアルゴリズムは容易である。

- Tight coupling

Loose coupling 同様、Kalman Filter におけるシステム方程式は INS の慣性航法方程式だが、観測方程式は GPS のより低レベルな出力である pseudo range や delta range 等によって構成される方式。Loose Coupling に比較して GPS の最大限の活用 (例えば測位衛星数が不足しても推定を行うことが可能になる) が見込めるが、アルゴリズムは複雑になる。この方法をさらに発展させより統合を密にした Ultra tight coupling が存在する。

また別の分類方法として処理方法によるものがある。参考文献 [6] によると以下のとおり 2 つが存在する。

- 中心化 (centralized) 位置の解を求める作業が INS と GPS 独立には行われず、比較的 low レベルの情報 (センサデータや pseudo range) などが一箇所の Kalman Filter に集められ解が求められる方式。Tight coupling 方式としばしば関係する。利点として、GPS に対する必要可視衛星数がないこと、GPS から高レートで補正が得られることなどある。欠点として、フィルタサイズが大きくなる、つまり計算負荷があがる、他の補強システムとの統合が難しくなる。

- 非中心化 (de-centralized) 位置の解を求める作業が INS と GPS 独立に行われ、それらが一つの Kalman Filter によって統合され、最も確からしい解を得る方式。GPS で解を得る必要があるため、4 衛星以上可視でなければならず、GPS からの補正は 1Hz 程度に留まる。しかし、フィルタサイズは小さく、他の補強システムとの統合も容易である。

本研究では、汎用的に使用するためには計算負荷が軽く、アプリケーションに応じて他の補強システムとの組み合わせが容易である必要があると考え、非中心化の Loose coupling 方式を採用した。図 3.2 にアルゴリズムの全体像を示す。

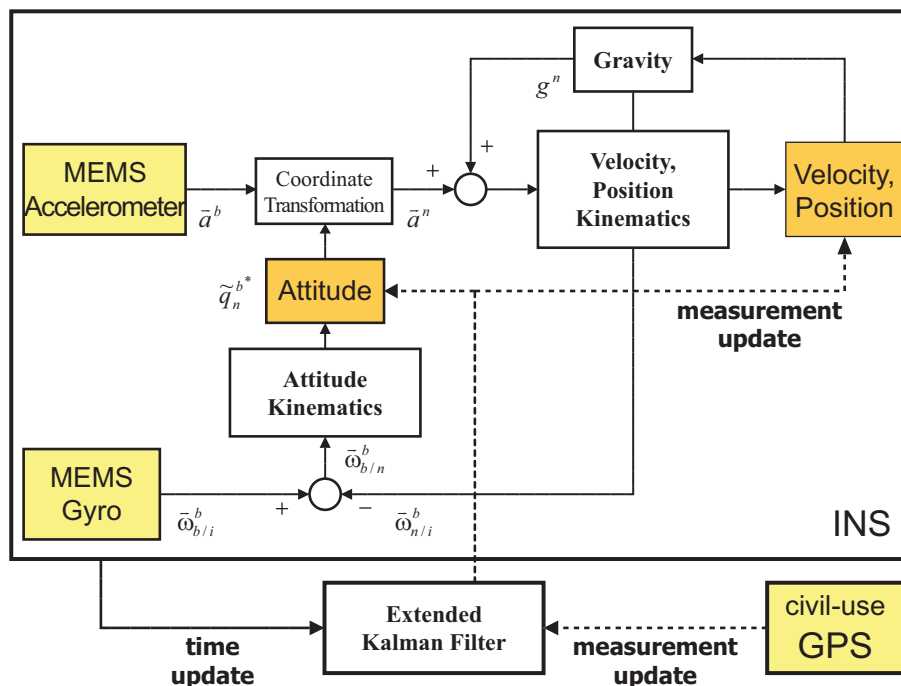


図 3.2: Loose coupling INS/GPS アルゴリズム

次節以降、Kalman Filter を構成するのに必要となるシステム方程式、観測方程式について述べた後、本研究で用いた INS/GPS アルゴリズムについて述べる。

### 3.3 システム方程式

本節では Kalman Filter を構成するのに必要となるシステム方程式について述べる。Loose coupling 方式を採用したので、システム方程式は INS の慣性航法方程式である。ここで状態量  $\underline{x}$  は速度  $\dot{r}_e^n$ 、位置  $q_e^n$ ,  $h$ 、姿勢  $q_n^b$  とする。すなわち

$$\underline{x} \equiv \begin{bmatrix} \dot{r}_e^n \\ q_e^n \\ h \\ q_n^b \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

である。また入力  $\underline{u}$  は、対象に固定された加速度計より得られる加速度  $\vec{a}^b$ 、ジャイロより得られる角速度  $\vec{\omega}_{b/i}^b$ 、重力  $\vec{g}^n$  とする。すなわち

$$\underline{u} \equiv \begin{bmatrix} \vec{a}^b \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \\ \vec{g}^n \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

である。またシステムに対し誤差はないと考えられるので

$$\underline{w} \equiv 0 \quad (3.3.3)$$

である。以上まとめると連続系で記したシステム方程式は

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (3.3.4)$$

である。

なお位置・姿勢について Quaternion を用いたのは、これらで方程式を記述した場合、オイラー角で発生するような三角関数を必要としない、すなわち非線形性が弱まると考えたためである。この点が他の INS/GPS アルゴリズムと比べてユニークな点である。オイラー角 (緯度  $\phi$  や経度  $\lambda$ 、ロール角  $\Phi$ 、ピッチ角  $\Theta$ 、ヨー角  $\Psi$ ) を得たい場合は 付録 A を用いて Quaternion を変換すればよい。また付録 D により一般的な方法である位置を Euler 角、すなわち緯度  $\phi$  や経度  $\lambda$ 、Azimuth 角  $\alpha$  であらわした場合の Loose coupling INS/GPS アルゴリズムを示す。

以下の小節で速度、位置、姿勢にわけて見ていくことにする。

### 3.3.1 速度の方程式

$e$ -Frame と  $i$ -Frame における対象対象の位置を  $\vec{r}_e$ 、 $\vec{r}_i$  と表記すると、 $e$ -Frame と  $i$ -Frame の原点は一致することから、回転 Quaternion によって両者の関係をあらわすことができる。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{r}_e \end{Bmatrix} = \tilde{q}_i^{e*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{r}_i \end{Bmatrix} \tilde{q}_i^e \quad (3.3.5)$$

ここで Quaternion の時間微分の公式より

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega} \end{Bmatrix} \tilde{q} \quad (3.3.6)$$

$$\dot{\tilde{q}}^* = (\dot{\tilde{q}})^* = \frac{1}{2} \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega} \end{Bmatrix} \tilde{q} \right)^* = -\frac{1}{2} \tilde{q}^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega} \end{Bmatrix} \quad (3.3.7)$$

であるから、(3.3.5) を時間微分すると

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} &= \frac{d}{dt} \left( \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{r}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \right) \\
&= \dot{\tilde{q}}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{r}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e + \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e + \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{r}_i \end{array} \right\} \dot{\tilde{q}}_i^e \\
&= -\frac{1}{2} \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{r}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e + \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e + \frac{1}{2} \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{r}_i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \\
&= \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e - \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \\
&\left( = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} - \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \right)
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$\vec{\omega}_{e/i}$  が時間変化しないことに注意して、さらに時間微分すれば

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} &= \frac{d}{dt} \left( \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e - \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \right) \\
&= \left( \dot{\tilde{q}}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e - \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \right) - \left( \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e - \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times (\vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i) \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \right) \\
&= \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e - 2\tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e + \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times (\vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i) \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \\
&= \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i \end{array} \right\}}_{\text{コリオリ力}} - 2\tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e + \underbrace{\tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times (\vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i) \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e}_{\text{遠心力}}
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

ここで  $e$ -Frame における速度は次のとおりである。

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n \end{array} \right\} = \tilde{q}_e^{n*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} \tilde{q}_e^n \tag{3.3.10}$$

微分して

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_e^n \end{array} \right\} &= \frac{d}{dt} \left( \tilde{q}_e^{n*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} \tilde{q}_e^n \right) \\
&= \dot{\tilde{q}}_e^{n*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} \tilde{q}_e^n - \tilde{q}_e^{n*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} \tilde{q}_e^n
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

(3.3.9) を代入すれば

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_e^n \end{array} \right\} &= \tilde{q}_e^{n*} \left( \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} - 2\tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e + \tilde{q}_i^{e*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times (\vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i) \end{array} \right\} \tilde{q}_i^e \right) \tilde{q}_e^n - \tilde{q}_e^{n*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} \tilde{q}_e^n \\
&= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} - \tilde{q}_e^{n*} \left( 2 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \dot{\vec{r}}_i \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{array} \right\} \right) \tilde{q}_e^n
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

さらに (3.3.8) より

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i^e \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} + \tilde{q}_i^{e*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \times \vec{r}_i \end{Bmatrix} \tilde{q}_i^e \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

従って

$$\begin{aligned} 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \dot{\vec{r}}_i^e \end{Bmatrix} &= 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_i^e \end{Bmatrix} \\ &= 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \end{Bmatrix} \left[ \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \end{Bmatrix} \right] \\ &= 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

であるから、(3.3.12) に代入して

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i^n \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i^n \end{Bmatrix} - \tilde{q}_e^{n*} \left( 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} \right) \tilde{q}_e^n \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i^n \end{Bmatrix} - \tilde{q}_e^{n*} \left( 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} \right) \tilde{q}_e^n \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

ところで観測対象に固定された加速度計から得られる加速度  $\vec{a}^b$  は、*i-Frame* における観測対象の加速度 (地球上に静止していることによる自転の向心力を含む) に地球の万有引力を加えたものを *b-Frame* 上で観測した値であり

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} = \tilde{q}_n^{b*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^b - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^b \end{Bmatrix}}_{\text{地球重力}} \quad (3.3.16)$$

変形して

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_i^n \end{Bmatrix} &= \tilde{q}_n^{b*} \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^b \end{Bmatrix} \right) \tilde{q}_n^b \\ &= \tilde{q}_n^{b*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^b + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

これを (3.3.15) に代入すれば、(3.3.18) のとおり  $n$ -Frame で観測対象の速度の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} &\equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \\
&= \tilde{q}_b^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_b^n + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \tilde{q}_e^{n*} \left( 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e^e) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^e \times \dot{\vec{r}}_e^e \end{Bmatrix} \right) \tilde{q}_e^n \\
&= \tilde{q}_b^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_b^n + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \left( 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \times \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \times \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \right) - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e^e) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
&= \tilde{q}_b^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_b^n + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ (2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e^e) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

ここにおいて  $\vec{\omega}_{e/i}^n$  は

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{Bmatrix} = \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \tag{3.3.19}$$

であり、 $\vec{\omega}_{e/i}$  は地球の自転速度ベクトル、すなわち

$$\vec{\omega}_{e/i}^i = \vec{\omega}_{e/i}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{e/i} \end{pmatrix} \tag{3.3.20}$$

である ( $\Omega_{e/i}$  は地球の自転速度)。

また  $\vec{\omega}_{n/e}^n$  は

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} = \tilde{q}_g^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^g \end{Bmatrix} \tilde{q}_g^n \tag{3.3.21}$$

であるが、 $\vec{\omega}_{n/e}^g$  は以下の手順で求めることが可能である。緯度、経度をそれぞれ  $\phi$ 、 $\lambda$  とすると

$$\frac{d}{dt} \phi \equiv \dot{\phi} = \frac{v_N}{R_{\text{meridian}} + h} \tag{3.3.22}$$

$$\frac{d}{dt} \lambda \equiv \dot{\lambda} = \frac{v_E}{\beta} = \frac{v_E}{(R_{\text{normal}} + h) \cos \phi} \tag{3.3.23}$$

ただし  $R_{\text{meridian}}$ 、 $R_{\text{normal}}$  はそれぞれ南北方向と東西方向における極率半径を表し、 $h$  は高度を、 $v_N$ 、 $v_E$  はそれぞれ北方向、東方向の速度をあらわすとする。地球モデル (WGS-84、付録 C 参照) より  $R_{\text{meridian}}$ 、 $R_{\text{normal}}$  は

$$R_{\text{meridian}} = \frac{r_e (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.3.24}$$



$$R_{\text{normal}} = \frac{r_e}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3.25)$$

$v_N$ 、 $v_E$  および 下方方向の速度  $v_D$  は

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ v_N \\ v_E \\ v_D \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{r}_e^g \end{Bmatrix} = \tilde{q}_n^{g*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{r}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^g \quad (3.3.26)$$

より得られる。

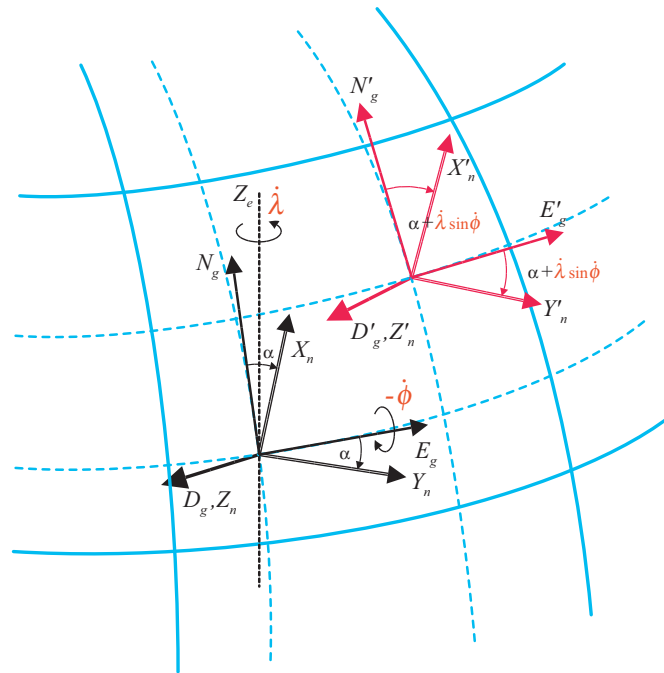


図 3.3:  $n$ -Frame の変化

ここで図 3.3 より  $\vec{\omega}_{n/e}^g$  は、

$$(\vec{\omega}_{n/e}^g)_{\text{east}} = -\dot{\phi} \quad (3.3.27)$$

$$(\vec{\omega}_{n/e}^g)_{\text{down}} = (\vec{\omega}_{n/e}^n)_{\text{down}} = \dot{\lambda} \sin \phi \quad (3.3.28)$$

$$(\vec{\omega}_{n/e}^e)_z = \dot{\lambda} \quad (3.3.29)$$

であるから重ね合わせて

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (\vec{\omega}_{n/e}^g)_{\text{east}} \\ (\vec{\omega}_{n/e}^g)_{\text{down}} \end{Bmatrix} + \tilde{q}_e^{g*} \begin{Bmatrix} 0 \\ (\vec{\omega}_{n/e}^e)_z \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^g \quad (3.3.30)$$

計算すると、

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{n/e}^g &= \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v_E}{R_{\text{normal}}+h} \\ -\frac{v_N}{R_{\text{meridian}}+h} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.3.31)$$

ここで北方向速度  $v_N$ 、東方向速度  $v_E$  は  $g$ -Frame と  $n$ -Frame の関係より  $\dot{r}_e^n$  から求まり

$$v_N = \dot{r}_{e0}^n \cos \alpha - \dot{r}_{e1}^n \sin \alpha \quad (3.3.32)$$

$$v_E = \dot{r}_{e0}^n \sin \alpha + \dot{r}_{e1}^n \cos \alpha \quad (3.3.33)$$

であるから

$$\vec{\omega}_{n/e}^g = \begin{pmatrix} \frac{(\dot{r}_e^n)_X \sin \alpha + (\dot{r}_e^n)_Y \cos \alpha}{R_{\text{normal}}+h} \\ -\frac{(\dot{r}_e^n)_X \cos \alpha - (\dot{r}_e^n)_Y \sin \alpha}{R_{\text{meridian}}+h} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.34)$$

もう一度  $g$ -Frame と  $n$ -Frame の関係を用いれば

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{n/e}^n &= \tilde{q}_g^{n*} \vec{\omega}_{n/e}^g \tilde{q}_g^n \\ &\equiv \begin{pmatrix} (\vec{\omega}_{n/e}^g)_X \cos \alpha + (\vec{\omega}_{n/e}^g)_Y \sin \alpha \\ -(\vec{\omega}_{n/e}^g)_X \sin \alpha + (\vec{\omega}_{n/e}^g)_Y \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \left( \frac{\cos \alpha^2}{R_{\text{normal}}+h} + \frac{\sin \alpha^2}{R_{\text{meridian}}+h} \right) + (\dot{r}_e^n)_X \cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{R_{\text{normal}}+h} - \frac{1}{R_{\text{meridian}}+h} \right) \\ -(\dot{r}_e^n)_X \left( \frac{\cos \alpha^2}{R_{\text{meridian}}+h} + \frac{\sin \alpha^2}{R_{\text{normal}}+h} \right) + (\dot{r}_e^n)_Y \cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{R_{\text{meridian}}+h} - \frac{1}{R_{\text{normal}}+h} \right) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.3.35)$$

さらに  $\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e)$  は、図 3.4 より

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) &= \Omega_{e/i}^2 \beta \begin{pmatrix} -\cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \cos \phi \begin{pmatrix} -\cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.3.36)$$

ここで付録 B より  $\tilde{q}_e^n$  の三角関数表現を適用すると

$$\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) = 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \begin{pmatrix} (\tilde{q}_e^n)_0 (\tilde{q}_e^n)_2 + (\tilde{q}_e^n)_1 (\tilde{q}_e^n)_3 \\ (\tilde{q}_e^n)_3 (\tilde{q}_e^n)_2 - (\tilde{q}_e^n)_1 (\tilde{q}_e^n)_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.37)$$

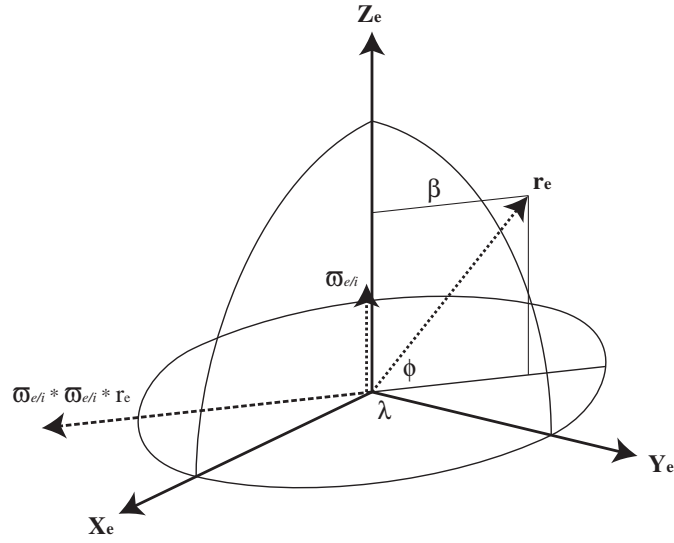


図 3.4: 向心力

### 3.3.2 位置の方程式

観測対象の位置は  $\tilde{q}_e^n$  と  $h$  であらわされる。

$\tilde{q}_e^n$  の方程式は Quaternion の時間微分の公式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{q}_e^n &\equiv \dot{\tilde{q}}_e^n = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^e \end{matrix} \right\} \tilde{q}_e^n \\ &= \frac{1}{2} \tilde{q}_n^{e*} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \tilde{q}_n^e \tilde{q}_e^n \\ &= \frac{1}{2} \tilde{q}_e^n \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

$\vec{\omega}_{n/e}^n$  は (3.3.35) より得られる。

また高度  $h$  の方程式は

$$\frac{d}{dt} h = -v_D \equiv -(i_e^n)Z \quad (3.3.39)$$

である。

### 3.3.3 姿勢の方程式

観測対象の姿勢は  $\tilde{q}_n^b$  であらわされ、その方程式は Quaternion の時間微分の公式から次のようにあらわされる。

$$\frac{d}{dt} \tilde{q}_n^b \equiv \dot{\tilde{q}}_n^b = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/n}^n \end{matrix} \right\} \tilde{q}_n^b \quad (3.3.40)$$

ここで

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{b/n}^n &= \vec{\omega}_{b/i}^n - \vec{\omega}_{n/i}^n \\ &= \vec{\omega}_{b/i}^n - \left( \vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n \right)\end{aligned}\quad (3.3.41)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^n \end{Bmatrix} = \tilde{q}_b^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_b^n \quad (3.3.42)$$

であり、 $\vec{\omega}_{e/i}^n$ 、 $\vec{\omega}_{n/e}^n$  はそれぞれ (3.3.19)、(3.3.35) から求まる。また  $\vec{\omega}_{b/i}^b$  は、*i-Frame* に対して *b-Frame* の回転角速度を *b-Frame* 上で観測した値であり、これはまさに観測対象に固定されたジャイロの出力である。

以上まとめて (3.3.40) は

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}_n^b &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{q}_b^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_b^n - \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} \right) \right] \tilde{q}_n^b \\ &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{q}_n^b \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \end{Bmatrix} - \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} \right) \tilde{q}_n^b \right]\end{aligned}\quad (3.3.43)$$

### 3.4 観測方程式

前節に続いて、本節では Kalman Filter を構成するのに同じく必要となる観測方程式について述べる。Loose coupling 方式を採用したので、観測方程式は GPS が出力する位置ならびに速度情報によって構成される。すなわち観測方程式で導入される観測量  $\underline{z}$  は、

$$\underline{z} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}}_e^n \\ \tilde{q}_e^n \\ h \end{bmatrix}_{\text{GPS}} \quad (3.4.1)$$

であり、観測方程式は

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \underline{v} \quad (3.4.2)$$

である。

もし GPS の位置出力が緯度  $\phi$  や経度  $\lambda$  の場合は式 (B.10.1) より  $\tilde{q}_e^n$  を求める。このとき、アジムス角  $\alpha$  は GPS から得られないので、システム方程式、つまり INS より求められたアジムス角  $\alpha_{\text{INS}}$  を利用する必要がある。

$$\tilde{q}_{e\text{GPS}}^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\lambda_{\text{GPS}} + \alpha_{\text{INS}}}{2} \left( \cos \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} + \sin \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda_{\text{GPS}} - \alpha_{\text{INS}}}{2} \left( \cos \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} - \sin \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} \right) \\ -\cos \frac{\lambda_{\text{GPS}} - \alpha_{\text{INS}}}{2} \left( \cos \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} - \sin \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda_{\text{GPS}} + \alpha_{\text{INS}}}{2} \left( \cos \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} + \sin \frac{-\phi_{\text{GPS}}}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (3.4.3)$$

また、GPS の速度出力は通常 NED 座標系、すなわち *g-Frame* での速度  $\dot{\tilde{r}}_e^g$  である。そのため座標変換を行い

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\tilde{r}}_{e\text{GPS}}^n \end{Bmatrix} = \tilde{q}_g^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\tilde{r}}_{e\text{INS}}^g \end{Bmatrix} \tilde{q}_g^n \quad (3.4.4)$$

とする必要がある。すなわち

$$\dot{\vec{r}}_{e\text{GPS}}^n = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_{N\text{GPS}} \cos \alpha_{\text{INS}} + \dot{\vec{r}}_{E\text{GPS}} \sin \alpha_{\text{INS}} \\ -\dot{\vec{r}}_{N\text{GPS}} \sin \alpha_{\text{INS}} + \dot{\vec{r}}_{E\text{GPS}} \cos \alpha_{\text{INS}} \\ \dot{\vec{r}}_D \end{pmatrix} \quad (3.4.5)$$

### 3.5 INS/GPS アルゴリズム

前節までに述べてきたシステム方程式と観測方程式を利用して、本節では Kalman Filter で統合された INS/GPS アルゴリズムを説明する。

ところでシステム方程式は非線形であるのに対し、観測方程式は線形である。このため 2.6 節で示した Extended Kalman Filter を単純に適応するわけにはいかない。そこで Extended Kalman Filter で行われた線形化の手法を応用する。

まず、状態量の推定値  $\hat{x}$  とその真値  $x$  の微小誤差  $\Delta x$  についてのシステム方程式を導く。これにともない入力  $\hat{u}$  とその真値  $u$  の微小誤差  $\Delta u$  も導入する。誤差の 2 次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &\equiv \frac{d}{dt} \hat{x} - x \\ &= f(\hat{x}, \hat{u}) - f(x, u) \\ &= f(x + \Delta x, u + \Delta u) - f(x, u) \\ &\equiv A\Delta x + B\Delta u \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

となり、システム方程式は誤差に対して線形となる。

また観測方程式については、状態量の真値  $x$  とシステム方程式を計算することによって得られたその推定値  $\hat{x}$ 、並びに観測量  $z$  には次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} z &= Hx + v \\ &= H(\hat{x} - \Delta x) + v \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

すなわち

$$z - H\hat{x} = -H\Delta x + v \quad (3.5.3)$$

となる。ここで左辺を新たな観測量としてみれば、観測方程式もまた誤差に対して線形となっている。

今、両方程式は誤差に対し線形となった。そこでこれらに対して通常の Kalman Filter を適用することが可能であり、目的は達せられた。Kalman Filter を導入することによって行う Time Update、Measurement Update の各フェーズの具体的処理については後で述べる。

これらの方程式をいかにつくるかであるが、一般的には、誤差はシステム方程式の状態量の 1 次差分であり、誤差に対するシステム方程式は元のシステム方程式を単純に線形化をすることによって得る。しかし本研究では、位置や姿勢を表現している Quaternion の誤差  $\Delta \tilde{q}$  を

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{q} &\equiv \hat{q} - \tilde{q} \\ &\equiv \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \tilde{u} \end{Bmatrix} \tilde{q} - \tilde{q} \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

となる微小誤差ベクトル要素  $\Delta\vec{u}$  とした。これは Quaternion のノルムが 1 でなければならないという制約条件を守るためであり、詳しくは次小節にて述べる。なお一般的な手法によって構成した誤差に対する方程式は付録 E に示す。

これをもって状態量の誤差  $\Delta\mathbf{x}$  は

$$\Delta\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Delta\vec{r}_e^n \\ \Delta\vec{u}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta\vec{u}_n^b \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

とし、また入力 of 誤差  $\Delta\mathbf{u}$  は

$$\Delta\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \Delta\vec{a}^b \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \\ \Delta\vec{g}^n \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

とした。センサのバイアス変動を推定する場合などは、入力の誤差の一部が状態量に含まれる場合もある(後述、3.6.4 節参照)が、今回は計算負荷を軽くするためこのような設定とした。

続けて、誤差に対して線形化されたシステム方程式(『誤差システム方程式』と呼ぶことにする)、観測方程式(『誤差観測方程式』と呼ぶことにする)を示す。最後に第 2 章での記載に倣い、Kalman Filter の Time Update と Measurement Update の 2 つのフェーズに分けてアルゴリズムの説明を行う。

### 3.5.1 Quaternion の誤差

Quaternion の誤差は、状態量における真値との微小差分ではなく [8] を参考に作成した。微小差分によって誤差を表現した場合、Quaternion のノルムを  $\|\vec{q}\|$  と書くならば

$$\begin{aligned} \|\vec{q} + \Delta\vec{q}\|^2 &= (q_0 + \Delta q_0)^2 + \|\vec{q} + \Delta\vec{q}\|^2 \\ &\approx (q_0^2 + \vec{q}^2) + 2(q_0\Delta q_0 + \vec{q} \cdot \Delta\vec{q}) \\ &= 1 + 2(q_0\Delta q_0 + \vec{q} \cdot \Delta\vec{q}) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

となり制約条件  $\|\vec{q} + \Delta\vec{q}\| = 1$  を常には満足できない。そこで  $\|\Delta\vec{u}\| \approx 0$  なる微小誤差ベクトル要素  $\Delta\vec{u}$  を導入し、誤差を Quaternion 積で表現すると

$$\vec{q} + \Delta\vec{q} \equiv \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\vec{u} \end{Bmatrix} \vec{q} = \begin{Bmatrix} q_0 - \Delta\vec{u} \cdot \vec{q} \\ \vec{q} + q_0\Delta\vec{u} + \Delta\vec{u} \times \vec{q} \end{Bmatrix} \quad (3.5.8)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{q} + \Delta\vec{q}\|^2 &\equiv (q_0 - \Delta\vec{u} \cdot \vec{q})^2 \\ &\quad + \|\vec{q} + q_0\Delta\vec{u} + \Delta\vec{u} \times \vec{q}\|^2 \\ &\approx (q_0^2 - 2q_0\Delta\vec{u} \cdot \vec{q}) \\ &\quad + (\|\vec{q}\|^2 + 2q_0\Delta\vec{u} \cdot \vec{q}) \\ &= q_0^2 + \|\vec{q}\|^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

となり誤差を含んだ状態でもノルムが 1 であることが保証される。これをもって Quaternion の誤差は微小誤差ベクトル要素  $\Delta\vec{u}$  で表現することとした。

なおこのような方法は表記の違いなどあれど積算型 (Multiplicative) と呼ばれ、宇宙機の姿勢決定などで多く用いられている。

### 3.5.2 誤差システム方程式

前小節で導入した Quaternion の誤差を元にシステム方程式を誤差に対して線形化していく。速度、位置、姿勢の順に見ていく。

#### 速度の誤差方程式

速度の方程式 (3.3.18) を誤差について線形化すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} &= \frac{d}{dt} \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n + \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \right) \\
&= \left[ (\tilde{q}_b^n + \Delta \tilde{q}_b^n)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b + \Delta \vec{a}^b \end{Bmatrix} (\tilde{q}_b^n + \Delta \tilde{q}_b^n) + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n + \Delta \vec{g}^n \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{Bmatrix} 0 \\ \left( 2 \left( \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n \right) + \left( \vec{\omega}_{n/e}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \right) \times \left( \dot{\vec{r}}_e^n + \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \tilde{q}_e^n + \Delta \tilde{q}_e^n \right)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{r}_e + \Delta \vec{r}_e \right) \right) \end{Bmatrix} \left( \tilde{q}_e^n + \Delta \tilde{q}_e^n \right) \right] \\
&\quad - \left[ \tilde{q}_b^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_b^n + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \left( 2 \vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \dot{\vec{r}}_e^n \right] - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \Big] \\
&= \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^b \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b + \Delta \vec{a}^b \end{Bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^b \right)^* - \tilde{q}_n^b \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^{b*} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ \left( 2 \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \dot{\vec{r}}_e^n + \left( 2 \vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \right)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \end{Bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \right) + \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
&\quad - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e \right) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
&= \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \left( \vec{a}^b + \Delta \vec{a}^b \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\Delta \vec{u}_n^b \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \vec{a}^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ \left( 2 \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \dot{\vec{r}}_e^n + \left( 2 \vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \tilde{q}_e^{n*} \left[ \begin{Bmatrix} 1 \\ -\Delta \vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \vec{u}_e^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \end{Bmatrix} \right] \tilde{q}_e^n \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{DCM} [\tilde{q}_e^n] \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e \right) \right) \end{Bmatrix} \\
&\approx \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \Delta \vec{a}^b - 2 \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \vec{a}^b \times \Delta \vec{u}_n^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ \left( 2 \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \dot{\vec{r}}_e^n + \left( 2 \vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \text{DCM} [\tilde{q}_e^n] \left( \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \right) \times \Delta \vec{u}_e^n \right) \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{DCM} [\tilde{q}_e^n] \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e \right) \right) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.5.10}$$



ここで  $\Delta\vec{\omega}_{e/i}^n$  は

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta\vec{\omega}_{e/i}^n \end{Bmatrix} &= (\tilde{q}_e^n + \Delta\tilde{q}_e^n)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} (\tilde{q}_e^n + \Delta\tilde{q}_e^n) - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
 &\equiv \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \right)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \right) - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
 &= \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\Delta\vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
 &\approx \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i + 2\vec{\omega}_{e/i}^i \times \Delta\vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
 &= \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\vec{\omega}_{e/i}^i \times \Delta\vec{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n
 \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
 \Delta\vec{\omega}_{e/i}^n &= \text{DCM}[\tilde{q}_e^n] (2\vec{\omega}_{e/i}^i \times \Delta\vec{u}_e^n) \\
 &= \begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} 2\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e^n \\
 &= 2\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} R_{01} & -R_{00} & 0 \\ R_{11} & -R_{10} & 0 \\ R_{21} & -R_{20} & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta\vec{u}_e^n
 \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

また  $\Delta\vec{\omega}_{n/e}^n$  は式 (3.3.35) より求められるが、ここで

$$R_{\text{normal}} = R_{\text{meridian}} \equiv r_e \tag{3.5.13}$$

の近似が成立するものとする

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_{n/e}^n &\approx \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \left( \frac{\cos \alpha^2}{r_e+h} + \frac{\sin \alpha^2}{r_e+h} \right) + (\dot{r}_e^n)_X \cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{r_e+h} - \frac{1}{r_e+h} \right) \\ -(\dot{r}_e^n)_X \left( \frac{\cos \alpha^2}{r_e+h} + \frac{\sin \alpha^2}{r_e+h} \right) + (\dot{r}_e^n)_Y \cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{r_e+h} - \frac{1}{r_e+h} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{(\dot{r}_e^n)_Y}{r_e+h} \\ -\frac{(\dot{r}_e^n)_X}{r_e+h} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n &\approx \frac{1}{r_e+h} \begin{pmatrix} \Delta(\dot{r}_e^n)_Y \\ -\Delta(\dot{r}_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{(r_e+h)^2} \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \\ -(\dot{r}_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h \\
 &= \frac{1}{r_e+h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\dot{r}_e^n - \frac{1}{(r_e+h)^2} \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \\ -(\dot{r}_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h
 \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

また  $\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e)$  は式 (3.3.37) から

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) &= 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \begin{pmatrix} q_0q_2 + q_1q_3 \\ q_3q_2 - q_1q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} R_{20} \\ R_{21} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

であるから

$$\begin{aligned} &2\text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \left( (\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e)) \times \Delta\vec{u}_e^n \right) \\ &= 2\text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \begin{bmatrix} 0 & -v_2 & v_1 \\ v_2 & 0 & -v_0 \\ -v_1 & v_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta\vec{u}_e^n \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{matrix} \\ &= 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{21} \\ 0 & 0 & -R_{20} \\ -R_{21} & R_{20} & 0 \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta\vec{u}_e^n \\ &= 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} -R_{02}R_{21} & R_{02}R_{20} & R_{00}R_{21} - R_{01}R_{20} \\ -R_{12}R_{21} & R_{12}R_{20} & R_{10}R_{21} - R_{11}R_{20} \\ -R_{22}R_{21} & R_{22}R_{20} & R_{20}R_{21} - R_{21}R_{20} \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta\vec{u}_e^n \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

さらに

$$\begin{aligned}
 & \text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e \right) \right) \\
 &= 2\Omega_{e/i}^2 \text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} q_0 q_2 + q_1 q_3 \\ q_3 q_2 - q_1 q_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta h + (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_1 & -q_0 & q_3 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta \tilde{q}_e^n \end{array} \right\} \\
 &= 2\Omega_{e/i}^2 \text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} q_0 q_2 + q_1 q_3 \\ q_3 q_2 - q_1 q_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta h \\ + (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_1 & -q_0 & q_3 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta \vec{u}_e^n \end{array} \right\} \\
 &= 2\Omega_{e/i}^2 \text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} q_0 q_2 + q_1 q_3 \\ q_3 q_2 - q_1 q_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta h \\ + (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} 0 & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) & 2(q_0 q_1 - q_2 q_3) \\ 1 - 2(q_0^2 + q_3^2) & 0 & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta \vec{u}_e^n \end{array} \right\} \\
 &= 2\Omega_{e/i}^2 \text{DCM}[\tilde{q}_e^n] \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{20} \\ R_{21} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta h + (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} 0 & R_{22} & -R_{21} \\ -R_{22} & 0 & R_{20} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta \vec{u}_e^n \end{array} \right\} \\
 &= \Omega_{e/i}^2 \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} R_{00} R_{20} - R_{01} R_{21} \\ R_{10} R_{20} - R_{11} R_{21} \\ R_{20} R_{20} - R_{21} R_{21} \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta h \\ + 2(R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} -R_{01} R_{22} & R_{00} R_{22} & -R_{00} R_{21} + R_{01} R_{20} \\ -R_{11} R_{22} & R_{10} R_{22} & -R_{10} R_{21} + R_{11} R_{20} \\ -R_{21} R_{22} & R_{20} R_{22} & -R_{20} R_{21} + R_{21} R_{20} \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta \vec{u}_e^n \end{array} \right\} \quad (3.5.18)
 \end{aligned}$$

ただしここで

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \Delta q_0 \\ \Delta \vec{q} \end{Bmatrix} &\equiv \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta \vec{u} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ \Delta \vec{q} \end{Bmatrix} - \tilde{q} = \begin{Bmatrix} -\Delta \vec{u} \cdot \vec{q} \\ q_0 \Delta \vec{u} + \Delta \vec{u} \times \vec{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \Delta \vec{u} \quad (3.5.19)
 \end{aligned}$$

を用いた。

以上まとめると誤差に関する速度の方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Delta \dot{\vec{r}}_e^n &= \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \Delta \vec{a}^b - 2 \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \vec{a}^b \times \Delta \vec{u}_n^b + \Delta \vec{g}^n + \dot{\vec{r}}_e^n \times \left( 2\Delta \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \right) - \left( 2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \\
 &\quad - 2 \text{DCM} [\tilde{q}_e^n] \left( \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \right) \times \Delta \vec{u}_e^n \right) - \text{DCM} [\tilde{q}_e^n] \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e \right) \right) \\
 &= \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \Delta \vec{a}^b - 2 \begin{pmatrix} R_{00}a_0^b + R_{10}a_1^b + R_{20}a_2^b \\ R_{01}a_0^b + R_{11}a_1^b + R_{21}a_2^b \\ R_{02}a_0^b + R_{12}a_1^b + R_{22}a_2^b \end{pmatrix}_{\tilde{q}_n^b} \times \Delta \vec{u}_n^b + \Delta \vec{g}^n \\
 &\quad + \frac{1}{r_e + h} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{r}_{nZ}^e & \dot{r}_{nY}^e \\ \dot{r}_{nZ}^e & 0 & -\dot{r}_{nX}^e \\ -\dot{r}_{nY}^e & \dot{r}_{nX}^e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \dot{\vec{r}}_e^n - \frac{1}{(r_e + h)^2} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{r}_{nZ}^e & \dot{r}_{nY}^e \\ \dot{r}_{nZ}^e & 0 & -\dot{r}_{nX}^e \\ -\dot{r}_{nY}^e & \dot{r}_{nX}^e & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \\ -(\dot{r}_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h \\
 &\quad + 4\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{r}_{nZ}^e & \dot{r}_{nY}^e \\ \dot{r}_{nZ}^e & 0 & -\dot{r}_{nX}^e \\ -\dot{r}_{nY}^e & \dot{r}_{nX}^e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{01} & -R_{00} & 0 \\ R_{11} & -R_{10} & 0 \\ R_{21} & -R_{20} & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta \vec{u}_e^n - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_1 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix}_{2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n} \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \\
 &\quad - 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} -R_{02}R_{21} & R_{02}R_{20} & R_{00}R_{21} - R_{01}R_{20} \\ -R_{12}R_{21} & R_{12}R_{20} & R_{10}R_{21} - R_{11}R_{20} \\ -R_{22}R_{21} & R_{22}R_{20} & R_{20}R_{21} - R_{21}R_{20} \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta \vec{u}_e^n \\
 &\quad - \Omega_{e/i}^2 \left\{ \begin{bmatrix} R_{00}R_{20} - R_{01}R_{21} \\ R_{10}R_{20} - R_{11}R_{21} \\ R_{20}R_{20} - R_{21}R_{21} \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta h \right. \\
 &\quad \left. + 2(R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} -R_{01}R_{22} & R_{00}R_{22} & -R_{00}R_{21} + R_{01}R_{20} \\ -R_{11}R_{22} & R_{10}R_{22} & -R_{10}R_{21} + R_{11}R_{20} \\ -R_{21}R_{22} & R_{20}R_{22} & -R_{20}R_{21} + R_{21}R_{20} \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta \vec{u}_e^n \right\} \\
 &= \text{DCM} [\tilde{q}_n^{b*}] \Delta \vec{a}^b - 2 \begin{bmatrix} 0 & -R_{02}a_0^b - R_{12}a_1^b - R_{22}a_2^b & R_{01}a_0^b + R_{11}a_1^b + R_{21}a_2^b \\ R_{02}a_0^b + R_{12}a_1^b + R_{22}a_2^b & 0 & -R_{00}a_0^b - R_{10}a_1^b - R_{20}a_2^b \\ -R_{01}a_0^b - R_{11}a_1^b - R_{21}a_2^b & R_{00}a_0^b + R_{10}a_1^b + R_{20}a_2^b & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_n^b} \Delta \vec{u}_n^b \\
 &\quad + \Delta \vec{g}^n + \frac{1}{r_e + h} \begin{bmatrix} \dot{r}_{nZ}^e & 0 & 0 \\ 0 & \dot{r}_{nZ}^e & 0 \\ -\dot{r}_{nX}^e & -\dot{r}_{nY}^e & 0 \end{bmatrix} \Delta \dot{\vec{r}}_e^n - \frac{1}{(r_e + h)^2} \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_X (\dot{r}_e^n)_Z \\ (\dot{r}_e^n)_Y (\dot{r}_e^n)_Z \\ -(\dot{r}_e^n)_X^2 - (\dot{r}_e^n)_Y^2 \end{pmatrix} \Delta h \\
 &\quad + 4\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} R_{21}(\dot{r}_n^e)_Y - R_{11}(\dot{r}_n^e)_Z & R_{10}(\dot{r}_n^e)_Z - R_{20}(\dot{r}_n^e)_Y & 0 \\ R_{01}(\dot{r}_n^e)_Z - R_{21}(\dot{r}_n^e)_X & R_{20}(\dot{r}_n^e)_X - R_{00}(\dot{r}_n^e)_Z & 0 \\ R_{11}(\dot{r}_n^e)_X - R_{01}(\dot{r}_n^e)_Y & R_{00}(\dot{r}_n^e)_Y - R_{10}(\dot{r}_n^e)_X & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta \vec{u}_e^n \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_1 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix}_{2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n} \Delta \dot{\vec{r}}_e^n - \Omega_{e/i}^2 \begin{bmatrix} R_{00}R_{20} - R_{01}R_{21} \\ R_{10}R_{20} - R_{11}R_{21} \\ R_{20}R_{20} - R_{21}R_{21} \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta h \\
 &\quad + 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \\
 &\quad \begin{bmatrix} R_{01}R_{22} + R_{02}R_{21} & -R_{00}R_{22} - R_{02}R_{20} & 0 \\ R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21} & -R_{10}R_{22} - R_{12}R_{20} & 0 \\ R_{21}R_{22} + R_{22}R_{21} & -R_{20}R_{22} - R_{22}R_{20} & 0 \end{bmatrix}_{\text{DCM}[\tilde{q}_e^n]} \Delta \vec{u}_e^n
 \end{aligned}
 \tag{3.5.20}$$

## 位置の誤差方程式

位置の方程式 (3.3.38), (3.3.39) を誤差について線形化すると次のようになる。

まず式 (3.3.38) についての誤差は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tilde{q}_e^n + \Delta\tilde{q}_e^n) &\equiv \frac{d}{dt} \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \right) \\ &= \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n + \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \frac{d}{dt} \tilde{q}_e^n \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} &= \left( \frac{d}{dt}(\tilde{q}_e^n + \Delta\tilde{q}_e^n) - \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \frac{d}{dt} \tilde{q}_e^n \right) \tilde{q}_e^{n*} \\ &= \left( \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_{n/e}^n + \Delta\tilde{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{q}_e^n \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} \right) \tilde{q}_e^{n*} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta\tilde{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^{n*} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{DCM}[\tilde{q}_e^{n*}] \Delta\tilde{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} \\ &\approx \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{DCM}[\tilde{q}_e^{n*}] \Delta\tilde{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

ここで

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{d}{dt} \Delta\tilde{u}_e^n \end{Bmatrix} \quad (3.5.23)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta\tilde{u}_e^n &= \frac{1}{2} \text{DCM}[\tilde{q}_e^{n*}] \Delta\tilde{\omega}_{n/e}^n \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{00} & R_{10} & R_{20} \\ R_{01} & R_{11} & R_{21} \\ R_{02} & R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \tilde{q}_e^n \left\{ \frac{1}{r_e + h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\dot{r}_e^n - \frac{1}{(r_e + h)^2} \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \\ -(\dot{r}_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h \right\} \\ &= \frac{1}{2(r_e + h)} \begin{bmatrix} -R_{10} & R_{00} & 0 \\ -R_{11} & R_{01} & 0 \\ -R_{12} & R_{02} & 0 \end{bmatrix} \tilde{q}_e^n \Delta\dot{r}_e^n + \frac{1}{2(r_e + h)^2} \begin{pmatrix} R_{10}(\dot{r}_e^n)_X - R_{00}(\dot{r}_e^n)_Y \\ R_{11}(\dot{r}_e^n)_X - R_{01}(\dot{r}_e^n)_Y \\ R_{12}(\dot{r}_e^n)_X - R_{02}(\dot{r}_e^n)_Y \end{pmatrix} \tilde{q}_e^n \Delta h \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

次に式 (3.3.39) についての誤差は

$$\frac{d}{dt} \Delta h = -\Delta(\dot{r}_e^n)_Z \quad (3.5.25)$$

## 姿勢の誤差方程式

姿勢の方程式 (3.3.43) を誤差について線形化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tilde{q}_n^b + \Delta\tilde{q}_n^b) &\equiv \frac{d}{dt} \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_n^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^b \right) \\ &= \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_n^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^b + \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta\tilde{u}_n^b \end{Bmatrix} \frac{d}{dt} \tilde{q}_n^b \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} &= \left( \frac{d}{dt} (\tilde{q}_n^b + \Delta \tilde{q}_n^b) - \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \frac{d}{dt} \tilde{q}_n^b \right) \tilde{q}_n^{b*} \\
&= \left[ \frac{1}{2} \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right) \tilde{q}_n^b \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b + \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b \end{array} \right\} \right. \\
&\quad - \left( \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \end{array} \right\} \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right) \tilde{q}_n^b \Bigg] \tilde{q}_n^{b*} \\
&\quad - \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \frac{1}{2} \left\{ \tilde{q}_n^b \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \end{array} \right\} - \left( \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{array} \right\} \right) \tilde{q}_n^b \right\} \tilde{q}_n^{b*} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right) \tilde{q}_n^b \right\{ \begin{array}{c} 0 \\ \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b \end{array} \right\} \\
&\quad - \left( \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \end{array} \right\} \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right) \tilde{q}_n^b \\
&\quad + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \left( \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{array} \right\} \right) \tilde{q}_n^b \right] \tilde{q}_n^{b*} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \tilde{q}_n^b \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b \end{array} \right\} \tilde{q}_n^{b*} \right. \\
&\quad - \left( \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n \end{array} \right\} \right) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \\
&\quad \left. + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \left( \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{array} \right\} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \tilde{q}_n^b \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b \end{array} \right\} \tilde{q}_n^{b*} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n + 2(\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \Delta \vec{u}_n^b \end{array} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{3.5.27}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Delta \vec{u}_n^b &= \frac{1}{2} \left\{ \text{DCM} \left[ \tilde{q}_n^{b*} \right] \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b - \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n - \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n - 2(\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \Delta \vec{u}_n^b \right\} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{00} & R_{10} & R_{20} \\ R_{01} & R_{11} & R_{21} \\ R_{02} & R_{12} & R_{22} \end{bmatrix}_{\tilde{q}_n^b} \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b - \Omega_{e/i} \begin{bmatrix} R_{01} & -R_{00} & 0 \\ R_{11} & -R_{10} & 0 \\ R_{21} & -R_{20} & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_n^b} \Delta \vec{u}_e^n \\
&\quad - \frac{1}{2(r_e + h)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \vec{r}_e^n + \frac{1}{2(r_e + h)^2} \begin{pmatrix} (i_e^n)_Y \\ -(i_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_1 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n} \Delta \vec{u}_n^b
\end{aligned} \tag{3.5.28}$$

誤差システム方程式

以上述べてきたことをまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta \underline{x} &= A \Delta \underline{x} + B \Delta \underline{u} \\ &\equiv \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{r}_e^n \\ \Delta \dot{u}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta \dot{u}_n^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{a}^b \\ \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b \\ \Delta \vec{g}^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

ただし行列  $A, B$  は

$$A_{00} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_1 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2\bar{\omega}_{e/i}^n + \bar{\omega}_{n/e}^n} + \frac{1}{r_e + h} \begin{bmatrix} \dot{r}_e^n Z & 0 & 0 \\ 0 & \dot{r}_e^n Z & 0 \\ -\dot{r}_e^n X & -\dot{r}_e^n Y & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.30)$$

$$\begin{aligned} A_{01} &= 4\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} R_{21}(\dot{r}_e^n)_Y - R_{11}(\dot{r}_e^n)_Z & R_{10}(\dot{r}_e^n)_Z - R_{20}(\dot{r}_e^n)_Y & 0 \\ R_{01}(\dot{r}_e^n)_Z - R_{21}(\dot{r}_e^n)_X & R_{20}(\dot{r}_e^n)_X - R_{00}(\dot{r}_e^n)_Z & 0 \\ R_{11}(\dot{r}_e^n)_X - R_{01}(\dot{r}_e^n)_Y & R_{00}(\dot{r}_e^n)_Y - R_{10}(\dot{r}_e^n)_X & 0 \end{bmatrix} \bar{q}_e^n \\ &+ 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} R_{01}R_{22} + R_{02}R_{21} & -R_{00}R_{22} - R_{02}R_{20} & 0 \\ R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21} & -R_{10}R_{22} - R_{12}R_{20} & 0 \\ R_{21}R_{22} + R_{22}R_{21} & -R_{20}R_{22} - R_{22}R_{20} & 0 \end{bmatrix} \text{DCM}[\bar{q}_e^n] \\ A_{02} &= -\frac{1}{(r_e + h)^2} \begin{bmatrix} (\dot{r}_e^n)_X (\dot{r}_e^n)_Z \\ (\dot{r}_e^n)_Y (\dot{r}_e^n)_Z \\ -(\dot{r}_e^n)_X^2 - (\dot{r}_e^n)_Y^2 \end{bmatrix} - \Omega_{e/i}^2 \begin{bmatrix} R_{00}R_{20} - R_{01}R_{21} \\ R_{10}R_{20} - R_{11}R_{21} \\ R_{20}R_{20} - R_{21}R_{21} \end{bmatrix} \text{DCM}[\bar{q}_e^n] \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

$$A_{03} = -2 \begin{bmatrix} 0 & -R_{02}a_0^b - R_{12}a_1^b - R_{22}a_2^b & R_{01}a_0^b + R_{11}a_1^b + R_{21}a_2^b \\ R_{02}a_0^b + R_{12}a_1^b + R_{22}a_2^b & 0 & -R_{00}a_0^b - R_{10}a_1^b - R_{20}a_2^b \\ -R_{01}a_0^b - R_{11}a_1^b - R_{21}a_2^b & R_{00}a_0^b + R_{10}a_1^b + R_{20}a_2^b & 0 \end{bmatrix} \bar{q}_n^b \quad (3.5.33)$$

$$B_{00} = \text{DCM}[\bar{q}_n^{b*}] \quad (3.5.34)$$

$$B_{01} = 0 \quad (3.5.35)$$

$$B_{02} = \Delta \vec{g}^n \quad (3.5.36)$$

$$A_{10} = \frac{1}{2(r_e + h)} \begin{bmatrix} -R_{10} & R_{00} & 0 \\ -R_{11} & R_{01} & 0 \\ -R_{12} & R_{02} & 0 \end{bmatrix} \bar{q}_e^n \quad (3.5.37)$$

$$A_{11} = 0 \quad (3.5.38)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2(r_e + h)^2} \begin{bmatrix} R_{10}(\dot{r}_e^n)_X - R_{00}(\dot{r}_e^n)_Y \\ R_{11}(\dot{r}_e^n)_X - R_{01}(\dot{r}_e^n)_Y \\ R_{12}(\dot{r}_e^n)_X - R_{02}(\dot{r}_e^n)_Y \end{bmatrix} \bar{q}_e^n \quad (3.5.39)$$

$$A_{13} = 0 \quad (3.5.40)$$

$$B_{10} = B_{11} = B_{12} = 0 \quad (3.5.41)$$

$$A_{20} = [0 \quad 0 \quad -1] \quad (3.5.42)$$

$$A_{21} = A_{22} = A_{23} = 0 \quad (3.5.43)$$

$$B_{20} = B_{21} = B_{22} = 0 \quad (3.5.44)$$

$$A_{30} = -\frac{1}{2(r_e + h)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.45)$$

$$A_{31} = -\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} R_{01} & -R_{00} & 0 \\ R_{11} & -R_{10} & 0 \\ R_{21} & -R_{20} & 0 \end{bmatrix} \tilde{q}_e^n \quad (3.5.46)$$

$$A_{32} = \frac{1}{2(r_e + h)^2} \begin{bmatrix} (i_e^n)_Y \\ -(i_e^n)_X \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.47)$$

$$A_{33} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_1 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{e/i}^n + \tilde{\omega}_{n/e}^n \quad (3.5.48)$$

$$B_{31} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{00} & R_{10} & R_{20} \\ R_{01} & R_{11} & R_{21} \\ R_{02} & R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \tilde{q}_n^b \quad (3.5.49)$$

$$B_{30} = B_{32} = 0 \quad (3.5.50)$$

である。

### 3.5.3 誤差観測方程式

観測方程式は式 (3.4.2) であるが、位置の表現として  $\tilde{q}_e^n$  を用いている。その項のみを取り出すと

$$(\tilde{q}_e^n)_{\text{GPS}} = I\tilde{q}_e^n + \nu_{\tilde{q}_e^n} \quad (3.5.51)$$

であるが、今、システム方程式を計算することによって得られた推定値  $\bar{q}_e^n$  と真値  $\tilde{q}_e^n$  との誤差を式 (3.5.4) の  $\Delta\tilde{u}_e^n$  で定義しているので

$$\begin{aligned} (\tilde{q}_e^n)_{\text{GPS}} &\approx I \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta\tilde{u}_e^n \end{array} \right\} * \tilde{q}_e^n + \nu_{\tilde{q}_e^n} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\Delta\tilde{u}_e^n \end{array} \right\} \tilde{q}_e^n + \nu_{\tilde{q}_e^n} \\ &= \bar{q}_e^n - \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tilde{q}_e^n + \nu_{\tilde{q}_e^n} \end{aligned} \quad (3.5.52)$$



である。すなわち  $\tilde{q}_e^n$  についての誤差観測方程式は

$$(\tilde{q}_e^n)_{\text{GPS}} - \tilde{q}_e^n = - \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} \Delta \vec{u}_e^n + v_{\tilde{q}_e^n} \quad (3.5.53)$$

である。

その他の観測量  $(\dot{r}_e^n)_{\text{GPS}}, (h)_{\text{GPS}}$  もあわせると、誤差観測方程式は

$$\begin{aligned} z - H\bar{x} &\equiv \begin{bmatrix} \dot{r}_e^n \\ \tilde{q}_e^n \\ h \end{bmatrix}_{\text{GPS}} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}_{\text{GPS}} \begin{bmatrix} \dot{r}_e^n \\ \tilde{q}_e^n \\ h \\ \tilde{q}_n^b \end{bmatrix}_{\bar{x}} \\ &= - \underbrace{\begin{bmatrix} I & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & I & 0 \end{bmatrix}}_{\equiv H_\Delta} \begin{bmatrix} \Delta \dot{r}_e^n \\ \Delta \tilde{u}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta \tilde{u}_n^b \end{bmatrix} + v \end{aligned} \quad (3.5.54)$$

### 3.5.4 Time Update

Time Update ではシステム方程式 (2.6.2) でシステムの推定値を更新すると共に、システムの誤差共分散行列  $P$  を Kalman Filter の式 (2.4.13) で更新する。この際に必要となる行列  $\Phi, \Gamma$  は、誤差システム方程式 (3.5.29) の行列  $A, B$  を連続系から離散系に変換する式 (2.5.4), (2.5.5) によって得られる。

誤差自体は誤差システム方程式 (3.5.29) で更新することは行わない。なぜなら誤差は Measurement Update が行われてはじめて推定が可能になるものであり、Time Update における誤差の推定値  $\Delta \bar{x}$  は

$$\Delta \bar{x} \equiv \underline{0} \quad (3.5.55)$$

だからである。

### 3.5.5 Measurement Update

Measurement Update では、まず Kalman Filter の式 (2.4.17) から Kalman Gain  $K$  を求める。この際に求められる行列  $H_{\Delta 1}$  は誤差観測方程式 (3.5.54) による。すなわち

$$H_{\Delta 1} \equiv H_\Delta = - \begin{bmatrix} I & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}_{\tilde{q}_e^n} & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.56)$$

であり、

$$K = \bar{P}H_{\Delta 1}^T (H_{\Delta 1}\bar{P}H_{\Delta 1}^T + R)^{-1} \quad (3.5.57)$$

である。

さらに式 (2.4.16) からこのときの誤差の推定値  $\Delta\hat{\mathbf{x}}$  を求める。このときの観測量  $\underline{z}$  ならびに行列  $H_{\Delta 2}$  は観測方程式 (3.4.2) による。また、Time Update における誤差の推定値  $\Delta\hat{\mathbf{x}}$  は前述のとおりゼロである。以上をもって式 (2.4.16) は

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\mathbf{x}} &\equiv \begin{bmatrix} \Delta\hat{v}_e^n \\ \Delta\hat{u}_e^n \\ \Delta\hat{h} \\ \Delta\hat{u}_n^b \end{bmatrix} \\ &= K \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{z} - H_{\Delta 2}\bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix}}_{\text{誤差観測方程式における観測量}} \end{aligned} \quad (3.5.58)$$

ただし

$$H_{\Delta 2} \equiv H = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.59)$$

である。

今、誤差の推定値  $\Delta\hat{\mathbf{x}}$  が得られたので、これを用いて状態量の推定値  $\bar{\mathbf{x}}$  を修正する。Quaternion  $\bar{q}$  の誤差がベクトル  $\Delta\hat{\mathbf{u}}$  であらわされていることに注意すると、更新された状態量  $\hat{\mathbf{x}}$  は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &\equiv \begin{bmatrix} \hat{v}_e^n \\ \hat{q}_e^n \\ \hat{h} \\ \hat{q}_n^b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{v}_e^n - \Delta\hat{v}_e^n \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \Delta\hat{u}_e^n \end{matrix} \right\} * \bar{q}_e^n \\ \bar{h} - \Delta\hat{h} \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \Delta\hat{u}_n^b \end{matrix} \right\} * \bar{q}_n^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.60)$$

となる。

最後にシステムの誤差共分散行列  $P$  を Kalman Filter の式 (2.4.23) で更新する。このときに必要とされる行列  $H_{\Delta 3}$  は誤差観測方程式 (3.5.54) による。すなわち

$$\hat{P} = [I - KH_{\Delta 3}]\bar{P} \quad (3.5.61)$$

ただし

$$H_{\Delta 3} \equiv H_{\Delta 1} \equiv H_{\Delta} \quad (3.5.62)$$

以上をもって状態量の更新ならびに誤差共分散行列  $P$  の更新が行われた。

## 3.6 実用上の付記

いままで本研究で用いる INS/GPS のアルゴリズムを述べてきたが、実際にこのアルゴリズムを適用するにあたってのいくつかの注意点を本節では述べる。

### 3.6.1 Time Update と Measurement Update のタイミング

Time Update は慣性センサ、すなわち加速度計とジャイロから値を取り出した際に行う処理である。つまり Time Update はサンプリング周期ごとに値をサンプルし、その後すぐに Time Update の処理を行うことが可能となる。

一方の Measurement Update は GPS の観測量が得られた際に行う処理である。GPS の観測量として GPS が出力する速度や位置を用いているが、現実問題として考えると GPS 内部で多少の処理時間を要する。リアルタイム処理を行う場合はこの点に注意しなければならない。このような場合は参考文献 [5] の 10.5 節 “Delayed measurements and synchronzation error” 等に遅れて得られた観測量をどのように処理すればよいか書かれている。しかし、今回は問題を単純にするためオフライン処理、あるいは理想的な GPS を仮定し、GPS の観測量は即座に得られるみものとして処理している。

### 3.6.2 初期化について

使用開始時から高精度が求められる航空宇宙用途の INS/GPS では、参考文献 [1] の第 11 章 Inertial Navigation System Ground Alignment にあるように、装置を静止状態におき状態量の初期値を決定する。この操作は Coarse Alignment、Fine Alignment と呼ばれる操作であり、数分間の計算後、きわめて正確に状態量の初期値を決定することが可能である。

しかしながら、この操作は地球の自転が得られるような極めて精度の高いジャイロを前提としたものであって、今回研究対象としているような MEMS のジャイロでは行うことができない。そこで極めて簡易的な初期化を行うことにした。

まず装置を GPS が使用可能かつ静止している状態におく。これによって初期化時の速度  $\dot{r}_e^n$  は 0 となる。また位置については、GPS から緯度・経度・高度が得られるので、それを位置  $\tilde{q}_e^n, h$  の初期値とする。このとき Azimuth 角  $\alpha$  は 0 とする。最後に加速度計で重力方向を見ることにより、ロール  $\Phi$  ならびにピッチ  $\Theta$  を決定することができる。このときのヘディング  $\alpha + \Psi$  を仮に 0 とすれば姿勢  $\tilde{q}_n^b$  を決定することができる。

さらに静止状態での値が決定された後に、はじめて動き出す際の GPS の速度ベクトルの水平方向上の向きをヘディングの初期値とする。すなわち

$$(\alpha + \Psi)_0 = \arctan \frac{v_{EGPS}}{v_{NGPS}} \quad (\pm\pi \text{ when } v_N < 0) \quad (3.6.1)$$

とする。これは動き始めた際には横滑りがない状態、つまり速度方向と対象物体の正面の向きが一致している可能性が高いという経験則から導入したものである。

以上をもって位置、速度、姿勢の全てが初期化された。このような簡易的な方法で初期化を行っても時

間を経過するごとに Kalman Filter による修正によって真値に近い値に収束することが予測されるので、実用上問題がないと思われる。また、汎用的に使用することを考えると、初期化の時間は短ければ短いほどよいと考えられるため、この初期化の方法は望ましいものだと考えられる。

### 3.6.3 誤差共分散行列の設定

入力の誤差共分散行列  $Q$  ならびに観測量の誤差共分散行列  $R$  を如何に設定するかは Kalman Filter の性能を大きく左右するため非常に重要である。またシステムの誤差共分散行列  $P$  の初期値も Kalman Filter の収束に関わるため重要である。ここではこれらの設定方法について述べる。

まず  $Q$  についてはセンサを観測することによって定めた。具体的にはセンサを短時間静止状態におき短時間観測、その出力値の分散を  $Q$  の対角成分として定めた。 $Q$  について重力に関係する項もあるが、これについては重力はほぼ変化しないと考え非常に小さな値を対角成分に設定した。

また  $R$  については GPS 受信機が出力する DOP や速度誤差などの誤差情報を利用して定めた。

$P$  の初期値については対角成分で適当に大きな値とした。これは今回提案するシステムでは使用開始当初から正確な推定を期待できないため、多少 Kalman Filter の収束が遅くなっても、初期のシステム誤差を多めに見積もっておく、つまりは  $P$  を大きめに設定しておく方がよいと考えたためである。

### 3.6.4 慣性センサのバイアス変動推定

本研究で用いる INS/GPS アルゴリズムは計算負荷を軽くするため、センサの誤差を入力誤差の項に留めるに留めたが、多くの既存 INS/GPS システムでは慣性センサ、すなわち加速度計やジャイロのバイアス変動を推定し、センサ誤差の一部を状態量に組込むことが常となっている。ここでは今まで述べてきた INS/GPS アルゴリズムにバイアス変動推定機構を組込む方法を述べる。

まずバイアス  $x_{\text{bias}}$  の変動は、参考文献 [1] の第 6 章 Navigation Sensor Models によると、経験的に以下の式のようにモデル化されることが知られている。

$$\frac{d}{dt}x_{\text{bias}} = -\beta x_{\text{bias}} + w_{\text{bias}}(t) \quad (3.6.2)$$

ここで  $w_{\text{bias}}(t)$  はホワイトノイズであり

$$E[w_{\text{bias}}(\tau)w_{\text{bias}}(t)] = N\delta(\tau - t) \quad (3.6.3)$$

またバイアス  $x_{\text{bias}}$  とホワイトノイズ  $w_{\text{bias}}(t)$  に時間的相関は全くなく

$$E[x_{\text{bias}}w_{\text{bias}}(t)] \equiv 0 \quad (3.6.4)$$

という関係が成立している。

詳しくは参考文献 [1] に譲るが、このモデルでは時刻  $t$  におけるバイアスの分散を解析的に求めることができ

$$E[x_{\text{bias}}^2] = e^{-2\beta t} E[x_{\text{bias}}^2]_{t=0} + \frac{N}{2\beta} [1 - e^{-2\beta t}] \quad (3.6.5)$$

となる。すなわち現実の慣性センサをこのモデルでモデル化するには、長時間静止させた結果観測されるバイアス変動から  $\beta$  と  $N$  を求めればよいことがわかる。

ところで、このモデルをバイアス変動の真値として採用すると、バイアスの推定値  $\bar{x}_{\text{bias}}$  とある時点での最も確からしいバイアスの推定値  $\hat{x}_{\text{bias}}$  の関係は、ホワイトノイズを直接観測することはできないので

$$\frac{d}{dt}\bar{x}_{\text{bias}} = -\beta\hat{x}_{\text{bias}} \quad (3.6.6)$$

となる。すなわち解析的に解くと

$$\bar{x}_{\text{bias}} = \hat{x}_{\text{bias}} e^{-\beta t} \quad (3.6.7)$$

として計算できる。

またバイアスの真値と推定値の誤差  $\Delta x_{\text{bias}}$  を考えると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta\bar{x}_{\text{bias}} &\equiv \frac{d}{dt}\bar{x}_{\text{bias}} - \frac{d}{dt}x_{\text{bias}} \\ &= -\beta\hat{x}_{\text{bias}} - (-\beta\hat{x}_{\text{bias}} + w_{\text{bias}}(t)) \\ &= -\beta(\hat{x}_{\text{bias}} - x_{\text{bias}}) - w_{\text{bias}}(t) \\ &= -\beta\Delta\hat{x}_{\text{bias}} - w_{\text{bias}}(t) \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

であり、慣性センサの誤差はホワイトノイズとバイアス変動によってもたらされていると考え、加速度計の出力誤差  $\Delta\vec{a}^b$  は

$$\Delta\vec{a}^b \equiv \Delta\vec{a}^b_{\text{WN}} + \Delta\vec{a}^b_{\text{bias}} \quad (3.6.9)$$

となり、ジャイロの出力誤差  $\Delta\vec{\omega}_{b/i}^b$  は

$$\Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \equiv \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{WN}} + \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{bias}} \quad (3.6.10)$$

となる。ただし

$$\frac{d}{dt}\Delta\vec{a}^b_{\text{bias}} = -\beta_{\vec{a}^b_{\text{bias}}}\Delta\vec{a}^b_{\text{bias}} - \vec{w}_{\vec{a}^b_{\text{bias}}} \quad (3.6.11)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{bias}} = -\beta_{\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{bias}}}\Delta\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{bias}} - \vec{w}_{\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{bias}}} \quad (3.6.12)$$

である。

以上をまとめるとバイアス変動を考えた場合の誤差システム方程式の状態量  $\Delta\mathbf{x}'$  は

$$\Delta\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \Delta\vec{r}_e^n \\ \Delta\vec{u}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta\vec{u}_n^b \\ \Delta\vec{a}^b_{\text{bias}} \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{bias}} \end{bmatrix} \quad (3.6.13)$$

また入力  $\Delta\mathbf{u}'$  は

$$\Delta\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \Delta\vec{a}^b_{\text{WN}} \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{WN}} \\ \Delta\vec{g}^n \\ \vec{w}_{\vec{a}^b_{\text{bias}}} \\ \vec{w}_{\vec{\omega}_{b/i}^b_{\text{bias}}} \end{bmatrix} \quad (3.6.14)$$

となり、システム方程式の入力とバイアスの関係が

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = f \left( \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_e^n \\ \dot{\vec{u}}_e^n \\ h \\ \dot{\vec{u}}_n^b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{a}^b + \vec{a}^{b \text{ bias}} \\ \vec{\omega}_{b/i}^b + \vec{\omega}_{b/i \text{ bias}}^b \\ \vec{g}^n \end{bmatrix} \right) \quad (3.6.15)$$

であることから、推定値誤差システム方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta\underline{x}' &= A'\Delta\underline{x}' + B'\Delta\underline{u}' \\ &= \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_{00} & B_{01} \\ & B_{10} & B_{11} \\ & B_{20} & B_{21} \\ & B_{30} & B_{31} \\ \hline 0 & -\beta_{\vec{a}^b \text{ bias}} & 0 \\ & 0 & -\beta_{\vec{\omega}_{b/i}^b \text{ bias}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta\dot{\vec{r}}_e^n \\ \Delta\dot{\vec{u}}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta\dot{\vec{u}}_n^b \\ \hline \Delta\vec{a}^b \text{ bias} \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \text{ bias} \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta\vec{a}^b \text{ WN} \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \text{ WN} \\ \hline \Delta\vec{g}^n \\ \vec{w}_{\vec{a}^b \text{ bias}} \\ \vec{w}_{\vec{\omega}_{b/i}^b \text{ bias}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

また誤差観測方程式は

$$\begin{aligned} z - H'\underline{\vec{x}} &\equiv \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_e^n \\ \dot{\vec{q}}_e^n \\ h \end{bmatrix}_{\text{GPS}} - \left[ \begin{array}{c|c} H & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_e^n \\ \dot{\vec{q}}_e^n \\ h \\ \dot{\vec{q}}_n^b \\ \hline \vec{a}^b \text{ bias} \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \text{ bias} \end{bmatrix}_{\underline{\vec{x}}} \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} H_\Delta & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta\dot{\vec{r}}_e^n \\ \Delta\dot{\vec{u}}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta\dot{\vec{u}}_n^b \\ \hline \Delta\vec{a}^b \text{ bias} \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \text{ bias} \end{bmatrix} + \nu \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

各記号  $A, B, H, H_\Delta$  は誤差システム方程式 (3.5.29)、誤差観測方程式 (3.5.54) のものである。

以上、バイアス変動の式 (3.6.7)、並びに新たな誤差システム方程式、誤差観測方程式が導出されたので、これを 3.5.4 節ならびに 3.5.5 節で述べた更新を行えばよい。

### 3.6.5 非線形性と Kalman Filter

今回 INS/GPS を構成するにあたりシステム方程式とした INS が非線形方程式であった。そのためシステム方程式には、Extended Kalman Filter に倣った線形化を施し Kalman Filter を適用したが、この非線形性の強弱がフィルタリング問題と強く関わっていることが参考文献 [9] などで言われている。この参考文献の中で、非線形性が強い対象に対して、例えばレーザートラッキングなどの問題については近年開発された Sigma Point Kalman Filter、その亜種である Unsented Kalman Filter などの、より高次項までの平均、分散推定を行うアルゴリズムが有効だとされる。実際、INS/GPS でも Unsented Kalman Filter を導入した研究は参考文献 [10] などに見られる。また非線形問題を別のアプローチから解決しようとニューラルネットワークを利用したものも参考文献 [11] などに存在する。

しかしながら、先の参考文献 [9] による限りでは、世の中の数ある非線形問題の中で INS/GPS は比較的弱い非線形性を持ち Extended Kalman Filter でも十分に性能を発揮できることが示されている。また、Unsented Kalman Filter は計算負荷が大きくなることが知られている。そこで本研究では Extended Kalman Filter でも十分な性能を得られると確信し用いることとした。

## 第 4 章

# 数値シミュレーション

本章ではコンピュータを用いて行った数値シミュレーションについて述べる。

シミュレーションを行うのは、より厳しい環境である実機による実験を行う前に、まず理想的な環境において本手法が実際にどの程度の精度を有するのか、そして最終目的である汎用的利用が可能であるかを見極めるためである。加えて、シミュレーションに引続き次章で実際の実機による実験をおこなっているが、その実機による結果を論理的に解析するにはシミュレーションの結果と付け合わせることが肝心である。さらにはこのシミュレーションで慣性センサのモデリングを行っているが、どの程度の精度をもつセンサによってシステム全体でどの程度の精度が得られるかといった実機では判断が難しい予測も立てることができる。以上の点でシミュレーションを行うことは大変重要であると考えられる。

このような考えのもと、数値的に求めた仮想的な MEMS 慣性センサ、および GPS の出力を前章で求めた INS/GPS アルゴリズムに適用するシミュレーションを行い、提案した手法の精度について論じた。以下、本シミュレーションで用いた慣性センサのモデル、並びに行ったシミュレーションの種類に応じてその条件、結果、考察を順に述べていく。

### 4.1 MEMS 慣性センサのモデリング

本研究で用いる INS を構成する MEMS 慣性センサであるが、それを次に示すとおり 2 通りのモデルを作成した。

#### 4.1.1 慣性センサモデル 1: 単純なホワイトノイズのみの場合

慣性センサのモデルとして単純なホワイトノイズのみを考えた極めて理想的なセンサも模擬したモデルである。ホワイトノイズは時間に変化しても時間とは無関係に加わるノイズであり、Kalman Filter がまさに想定しているノイズである。そのため、事前にそのノイズ特性が正しく測定できている必要があるものの、Kalman Filter によるノイズ除去が期待される。

慣性センサのホワイトノイズ ( $\sigma_{WN}$ ) は通常次式であらわされる。

$$\sigma_{WN} = \sigma_{1\text{Hz}} \sqrt{f} \quad (4.1.1)$$

ここで  $\sigma_{1\text{Hz}}$  は、ある状態で静止している慣性センサの出力値を非常に高いサンプリング間隔でデータを



取得し、それを 1Hz で平均化したときに発生するホワイトノイズの標準偏差である。また  $f$  はセンサの出力値を取得するサンプリング周波数である。つまりサンプリング周波数が高ければ高いほど出力値にホワイトノイズが加わることを示している。

ここでは市場に数多く流通している MEMS 慣性センサである Analog Device 社製の MEMS 加速度計 (製品名 ADXL103)、MEMS ジャイロ (製品名 ADXRS150) を用いることとした。これらのセンサのホワイトノイズは、カタログスペックから

$$\begin{aligned} (\sigma_{\text{WN } 1\text{Hz}})_{\text{accelerometer}} &\equiv (\sigma_{1\text{Hz}})_{\text{ADXL103}} = 110[\mu\text{g}] \approx 10^{-3}[\text{m/s}^2] \\ (\sigma_{\text{WN } 1\text{Hz}})_{\text{gyro}} &\equiv (\sigma_{1\text{Hz}})_{\text{ADXRS150}} = 0.05[^\circ/\text{s}] \approx 10^{-3}[\text{rad/s}] \end{aligned}$$

である。真値に対してこれらの値を用いたホワイトノイズを加えたものを慣性センサモデル 1 とする。図 4.1 に慣性センサモデル 1 の処理過程を示す。

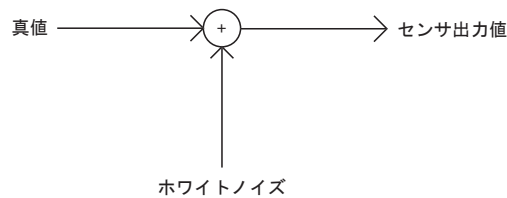


図 4.1: 慣性センサモデル 1

#### 4.1.2 慣性センサモデル 2: ジャイロのランダムドリフトを考慮した場合

慣性センサモデル 2 では慣性センサモデル 1 で考慮したホワイトノイズに加え、ジャイロのランダムドリフトを考慮した現実の慣性センサにより近いモデルである。

ランダムドリフトとは時間に依存した過程であり、慣性センサに限った話で言えばバイアス成分、すなわちゼロ点の変動する過程である。INS/GPS アルゴリズムのバイアス変動除去に関して記した 3.6.4 節で示したとおり、慣性センサのバイアス成分  $x_{\text{bias}}$  は以下の式でよくモデル化されることが知られている。

$$\frac{d}{dt}x_{\text{bias}} = -\beta x_{\text{bias}}(t) + w(t) \quad (4.1.2)$$

ここで  $\beta$  は定数であり、 $w(t)$  は以下の関係を満たすホワイトノイズである。

$$E[w(t)w(\tau)] = N\delta(t - \tau) \quad (4.1.3)$$

これを離散系に変換すると

$$x_{\text{bias } k+1} = -\beta x_{\text{bias } k} \Delta t + \sqrt{N}u_{k+1} \Delta\sqrt{t} \quad (4.1.4)$$

となる。ここで  $u_{k+1}$  は単位ホワイトノイズ、すなわち偏差が 1 のホワイトノイズである。

通常ランダムドリフトの効果は加速度計に比べジャイロで大きいので、ジャイロに対してのみランダムドリフトを考慮することにした。また慣性センサモデル 1 と同様に MEMS ジャイロとして Analog Devices 社製の MEMS ジャイロ (製品名 ADXRS150) を仮定した。しかしながらカタログにはランダム

ドリフトのスペックが記されていないので、実機を計測することによりランダムドリフトの定数 ( $\beta$  ならびに  $\sqrt{N}$ ) を決定することにした。

以上より慣性センサモデル2のジャイロでは図4.2のようになる。

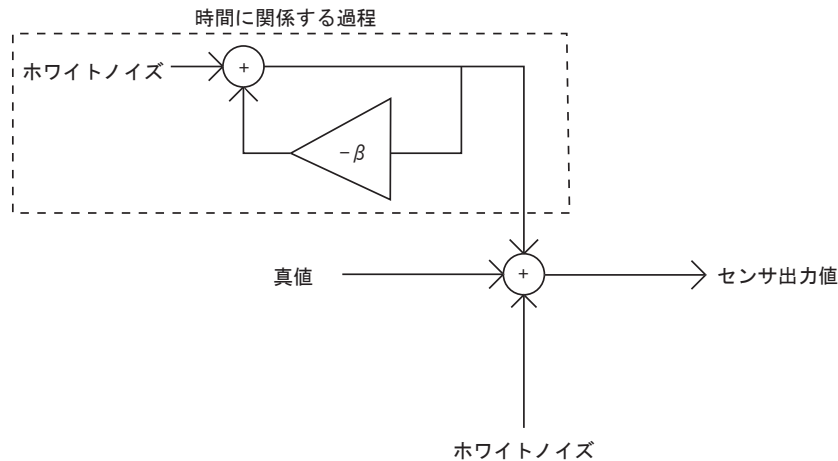


図 4.2: 慣性センサモデル2におけるジャイロの処理過程図

定数の決定方法は以下の手順を踏んだ。

1. センサを1時間静止状態に置いたまま、100Hzでサンプリングを行う。この際外部環境も温度が変わらないようにするなどして外乱の影響を極力排除する。
2. Allan Variance を用いて計測データを処理し、計測データからホワイトノイズとランダムドリフトを区別できるようにする。
3. 定数  $\beta$ 、 $\sqrt{N}$  を決定したセンサモデルを作成し、静止状態に置いたとしてそのモデルから100Hzでサンプリングを行う。
4. 3でサンプリングしたデータに対して2同様Allan Varianceをとる。
5. 2と4のAllan Varianceの傾向が一致するまで3、4を繰り返す。

Allan Variance についての詳細は付録Fで述べるが、一定のサンプリング間隔ごとに分散をとることによってデータの時間に依存する部分を定性的にみることが可能になる手法である。

これより慣性センサモデル2におけるジャイロのランダムドリフトの定数  $\beta_{\text{Gyro}}$ 、 $\sqrt{N}_{\text{Gyro}}$  は以下のとおり決定した。

$$\beta_{\text{Gyro}} = 0.016$$

$$\sqrt{N}_{\text{Gyro}} = 0.00008 \text{ [rad/s]}$$

図4.3、図4.4はそれぞれADXR5150実機、ならびに慣性センサモデル2のジャイロの静止状態におけるAllan Varianceである。縦軸はサンプリング時間間隔、横軸はAllan Varianceである。図4.3、図4.4は時間間隔が大きい部分でよく一致していることから、このモデルはランダムドリフトをよく実機により近いものになったと考えることができる。時間間隔が小さい部分では再現性に多少の問題があるが、これは実機にはLow Pass Filterが入っているためであると推測される。本シミュレーションではランダムド

リフトの効果について重きをおいているのでこれは問題にはならないと考えられる。また図 4.5 は慣性センサモデル 1 の Allan Variance であるが、ランダムドリフトを考慮していない分、サンプル時間間隔が大きい部分で一致していない。

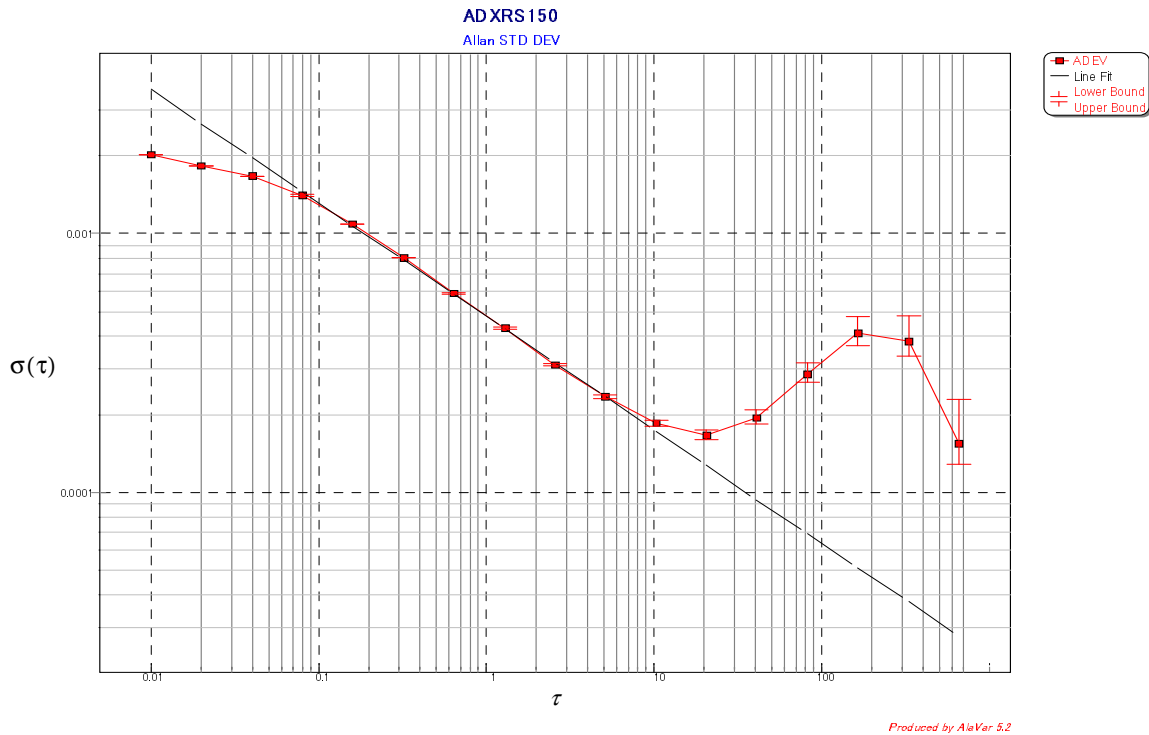


図 4.3: ADXRS150 の Allan Variance

## 4.2 水平定常旋回シミュレーション

姿勢が一定で水平面上を一定速度で旋回運動する物体に、提案した航法システムを取り付けた場合のシミュレーションを行った。このような軌道を仮定したのは水平定常旋回という運動が航法装置にとっては過酷な条件であるためである。なぜなら定常旋回飛行を行うことによって、対象には重力の他に定常的な遠心力が観測される。つまり重力と遠心力を加えた“みかけの重力”が発生している状態であり、地球での航法を行うにあたって姿勢を把握するのに非常に重要なリファレンスである重力方向を利用することができない。

またこの軌道は小型の UAV の飛行軌道を模擬したものである。序章でも述べたとおり、現在 UAV では本研究で提案するような小型軽量で精度が高い航法システムが求められており、格好の対象だといえる。

### 4.2.1 条件

シミュレーションは次の条件下で行った。

- 水平等速旋回軌道

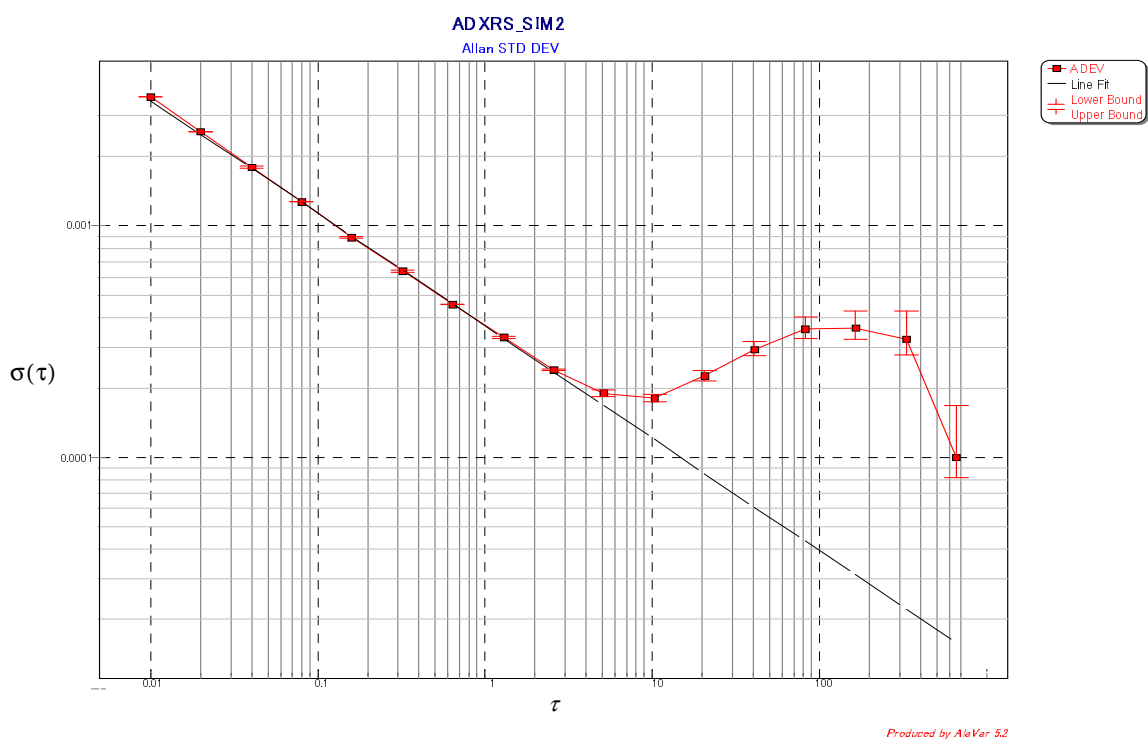


図 4.4: 慣性センサモデル 2 のジャイロの Allan Variance

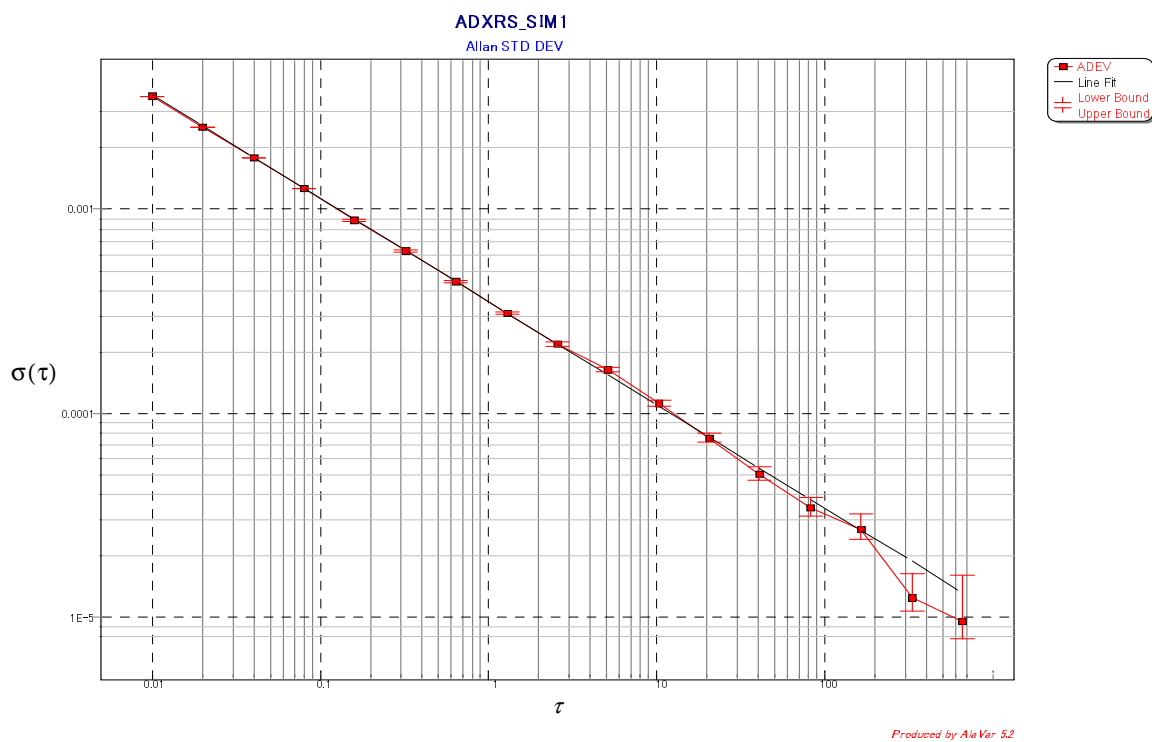


図 4.5: 慣性センサモデル 1 のジャイロの Allan Variance

半径 100m の円上を 1 周 120 秒で水平等速旋回飛行する。全部で 5 周、600 秒間のシミュレーションを行った。シミュレーション開始時において既に水平定常旋回飛行をしているものとし、終了時までこの飛行を維持するものとする。このとき機速は  $100[\text{m}] \times 2\pi/120 [\text{sec}] \approx 5[\text{m/s}]$  で、実際の UAV の飛行速度に近い速度である。

- アルゴリズム

GPS の補強はなしで慣性センサによる INS のみ、ならびに前章で述べた INS/GPS アルゴリズムの両方で行った。

- 慣性センサ

慣性センサは前節で述べた 2 つのモデルを利用した。また実際の慣性センサには温度によるドリフト効果や他軸相関、ミスアライメントなど様々な誤差要因が存在するが、これらは十分なキャリブレーションを行うことによってある程度除去であると考え、上のモデルで考えたノイズ意外は別段考慮しないものとする。対象物体との取付けは進行方向を X 軸とし、Z 軸が下向きになるよう取付けたものとする。

- GPS 受信機

GPS は民生用の GPS 受信機を模擬し、1Hz で 3 次元の位置情報、3 次元の速度情報が得られるものとする。精度は真値に対して水平面上で約 20m、高度で約 30m、速さで約 1m/s、速度方向で約  $5^\circ$  のホワイトノイズを含むものとした。この値は実際の民生用 GPS 受信機の精度に比べ多少悪い (実際は位置精度で 10m 程度だといわれる) が、シミュレーションを行う上で多少条件を悪く設定しておくのは特に問題がないと考え、このような設定とした。基本的には常に GPS 衛星が 4 衛星以上可視で、INS/GPS アルゴリズムにおける GPS 受信機の出力は常に使用可能であるとした。

- 初期化

初期化は位置、速度の初期値については 3.6.2 節で述べた方法にならない GPS から取得した。姿勢の初期値についてはシミュレーション開始時で既に飛行してしまっているので真値で代用した。

- 誤差共分散行列  $Q$ 、 $R$

INS/GPS の Kalman Filter における誤差共分散行列  $Q$ 、 $R$  はそれぞれセンサ、GPS のホワイトノイズの分散が計測できたものとして、その値を用いることにした。慣性センサモデル 1 と慣性センサモデル 2 ではこれらの値は同じである。

#### 4.2.2 結果ならびに考察

全部で 5 周分のシミュレーションを行ったが、まず 1 周目の結果について示す。図 4.6、図 4.7、図 4.8 はそれぞれ 1 周目の位置履歴、速度履歴、姿勢履歴を表わしている。なお今後の図において判例の括弧内の Model1、Model2 の表記は、それぞれセンサモデル 1、センサモデル 2 による結果である。

位置履歴から明らかなように、センサモデル 2 は勿論のことセンサモデル 1 であっても、INS のみでは正しく 1 周分の履歴を計算できていない。これは MEMS 慣性センサの性能を如実にあらわしており、1 周、すなわち 120 秒程度といった短時間の使用でも INS として機能できないほど性能が悪いことを表わしている。実際の慣性センサではこれにさらに温度ドリフトや取付け誤差、といった別の誤差要因が

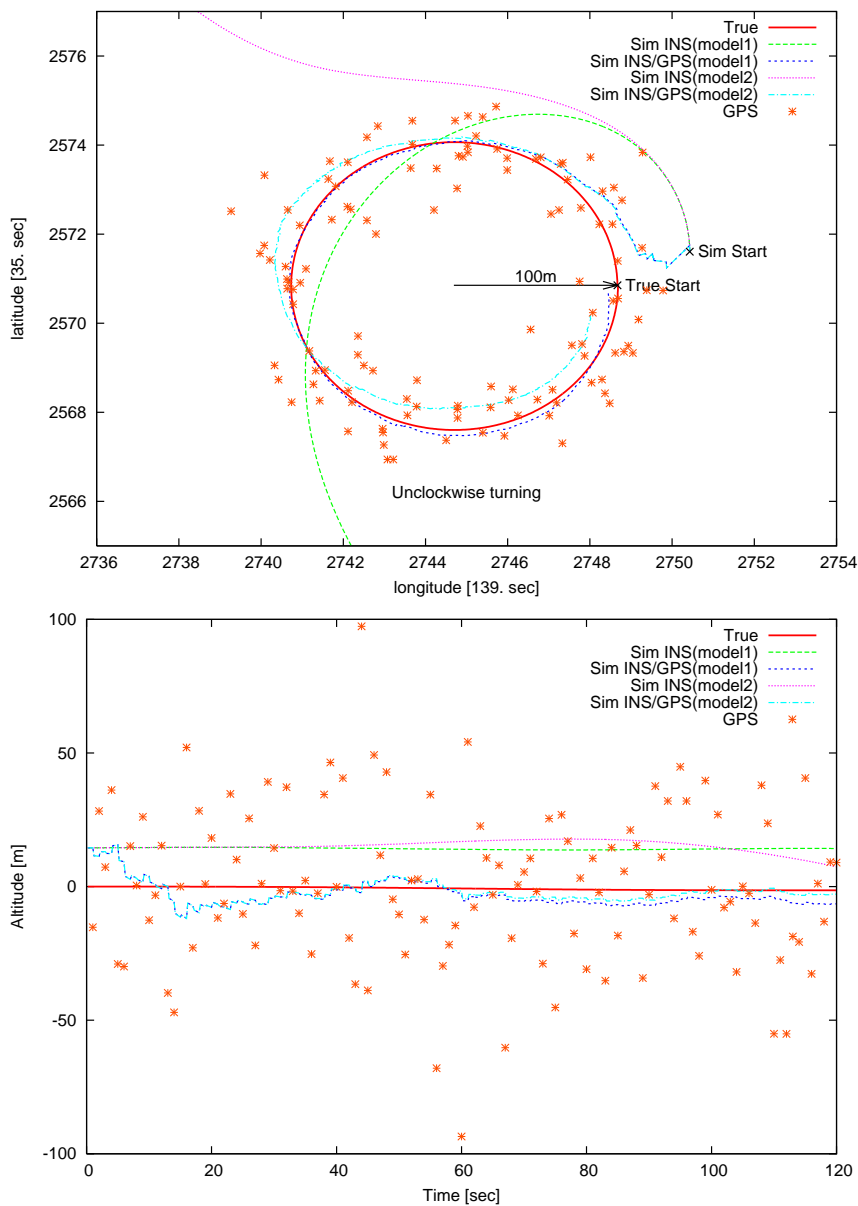


図 4.6: シミュレーション 位置履歴 (1 周)

加わることも考慮にいと安価な MEMS 慣性センサのみで航法計算を行うのは不可能であると考えられる。

それに対して GPS の補強をいれた INS/GPS アルゴリズムでは性能が悪い MEMS 慣性センサであっても 1 周分の履歴を正しく算出していることがわかる。特に GPS 受信機から全く直接的な補正が得られない姿勢については非常によく真値に近い推定結果を算出しており、また GPS 受信機単体の誤差が標準偏差にして 30m と大きい高度であってもよく推定できている。

INS/GPS アルゴリズムにおいてセンサモデル 1 とセンサモデル 2 の結果を比較してみると、前者が後者に比べ優れていることが位置履歴などから読み取れる。これは事前の予想どおりであり、用いたアルゴリズムが前者にはなく後者にのみあるジャイロのランダムドリフトの効果を考慮していないことによるも

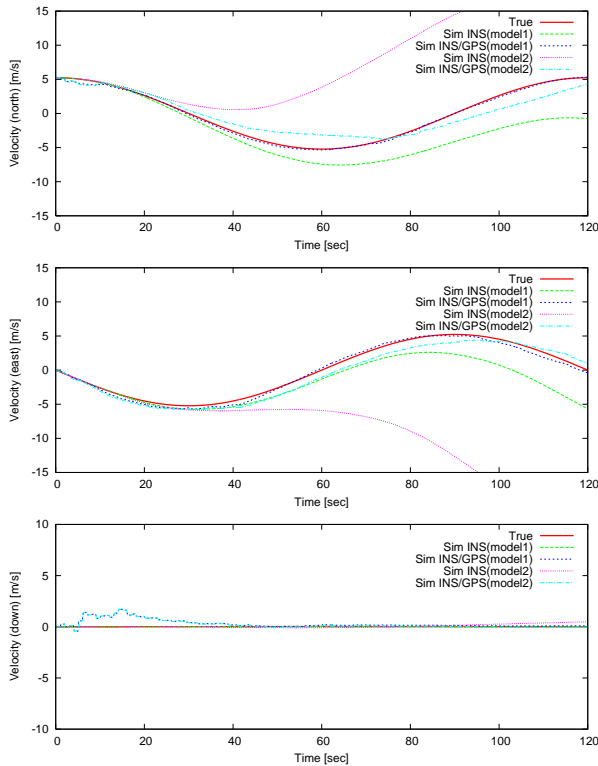


図 4.7: シミュレーション 速度履歴 (1 周)

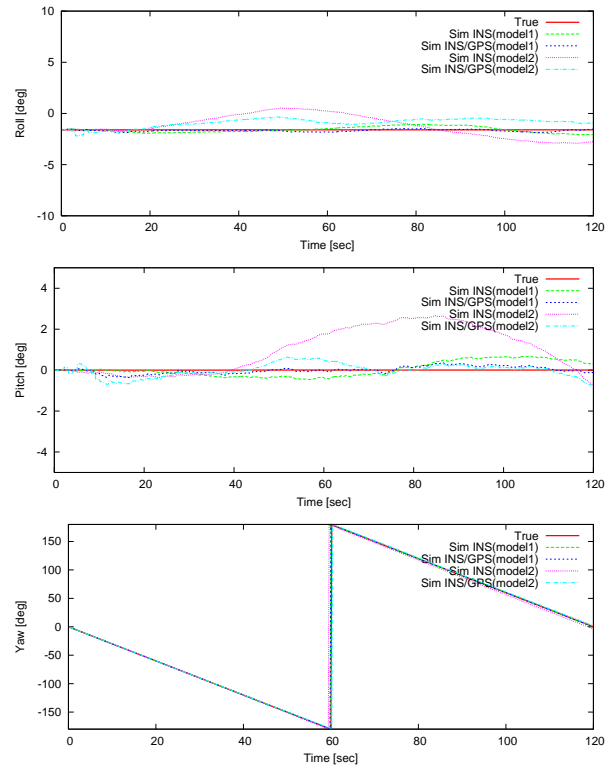


図 4.8: シミュレーション 姿勢履歴 (1 周)

のと考えられる。しかしながら後者であっても推定結果は発散することなく真値に近い値に収束しようとしていることがわかる。このランダムドリフトの効果は時間に依存する効果であり、次に述べるより長時間の結果であるシミュレーション全体の結果、つまり 5 周分の結果からより確かなことがいえるであろう。

次にシミュレーションの全体である 5 周分の結果を示す。1 周目で既に真値から離れてしまった INS のみの結果についてはここでは省略する。図 4.9、図 4.10、図 4.11 はそれぞれ 5 周分の位置履歴、速度履歴、姿勢履歴を表わしている。

全ての履歴から明らかのようにセンサモデル 1、センサモデル 2 のどちらであっても、INS/GPS アルゴリズムによる結果は発散することなく真値に近い推定値を算出していることが見て取れる。また 1 周目の履歴から得られたセンサモデル 1 による結果がセンサモデル 2 よりも優れている性質は、ここでも各履歴から見て取れる。

Kalman Filter の性質として、モデル化されていない強力なノイズがシステムに加わった場合、推定値が発散する性質がある。しかしながら、センサモデル 2 に対しても INS/GPS アルゴリズムによる推定結果は発散していないことから、MEMS 慣性センサのランダムドリフトは性能を悪化させるものの、フィルタを発散させるほど強力なものではないと考えられる。このことは提案するシステムの信頼性を考える上で非常に重要な点であり、精度が悪化しても計算負荷を低く抑えたいという要望がある場合には、提案した INS/GPS アルゴリズムのようにホワイトノイズ以外のノイズを考慮せずとも十分であることができるだろう。

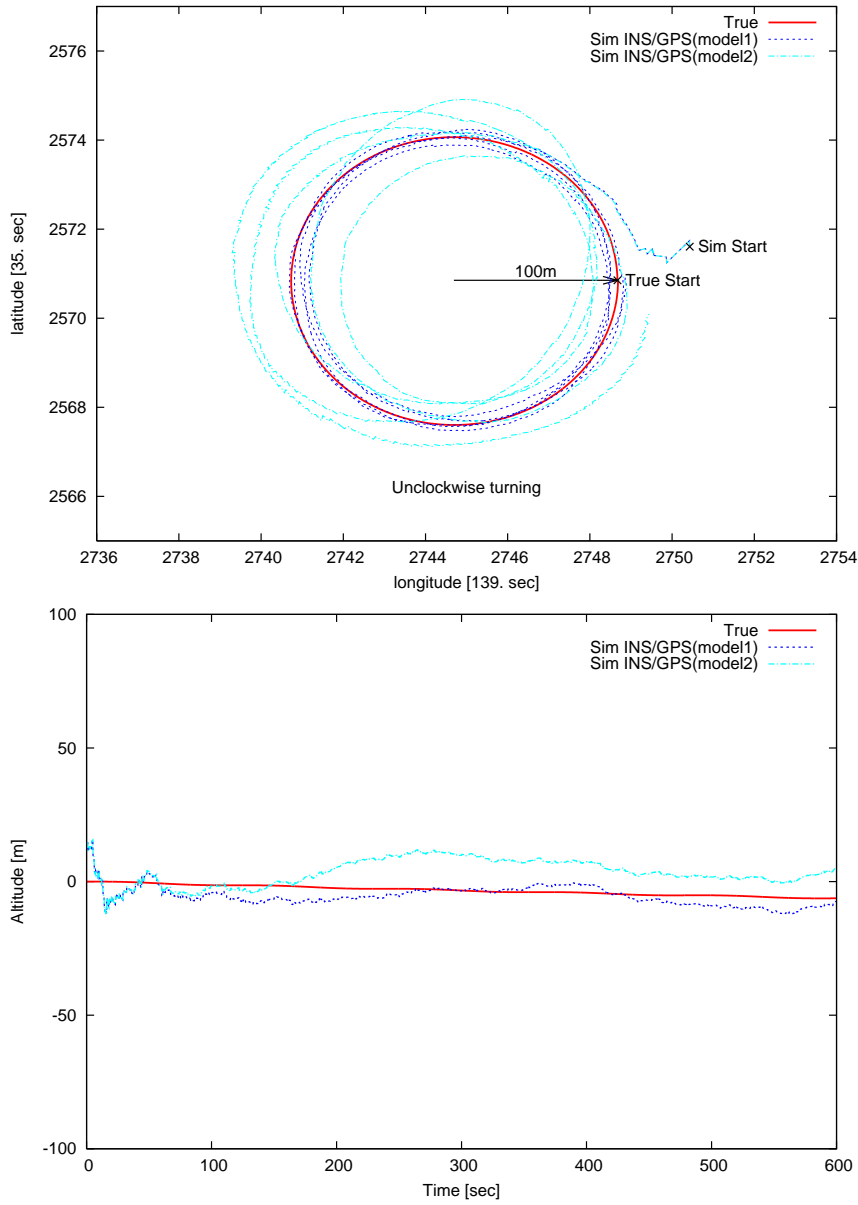


図 4.9: シミュレーション 位置履歴 (5 周)

このことをバイアス変動の式 (4.1.2) を解析的に解いて考察してみる。参考文献 [1] によると、ある時刻  $t$  とそこから  $\tau$  だけ経過したときのバイアス  $x_{\text{bias}}$  の分散は

$$E [x_{\text{bias}}^2 (t + \tau)] = e^{-2\beta\tau} E [x_{\text{bias}}^2 (t)] + \frac{N}{2\beta} [1 - e^{-2\beta\tau}] \quad (4.2.1)$$

となる。しばらく時刻が経過し、定常状態になった際 ( $\beta \neq 0$  なら定常状態になる) には

$$E [x_{\text{bias}}^2 (t + \tau)] = E [x_{\text{bias}}^2 (t)] = \frac{N}{2\beta} \quad (4.2.2)$$

となる。いま具体的にセンサモデル 2 のバイアス変動で用いた値  $\beta = 0.016$ 、 $N = 0.00008$  を代入してみ



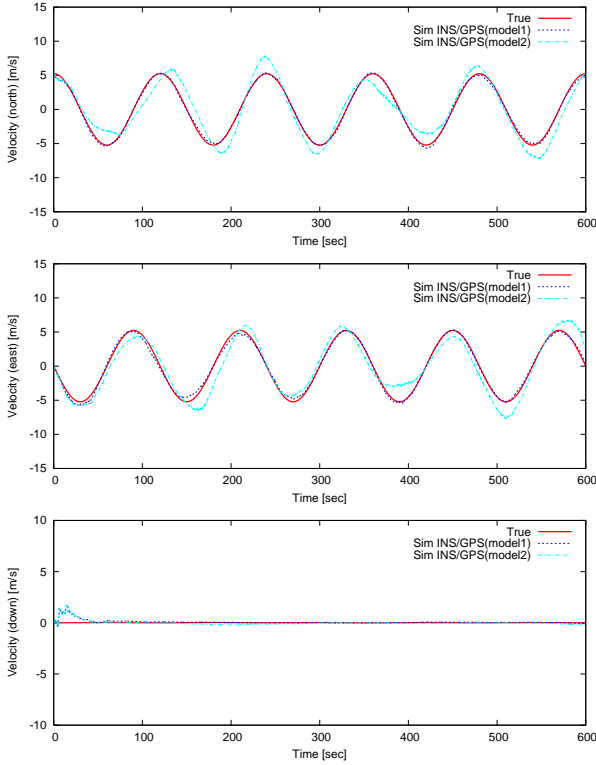


図 4.10: シミュレーション 速度履歴 (5 周)

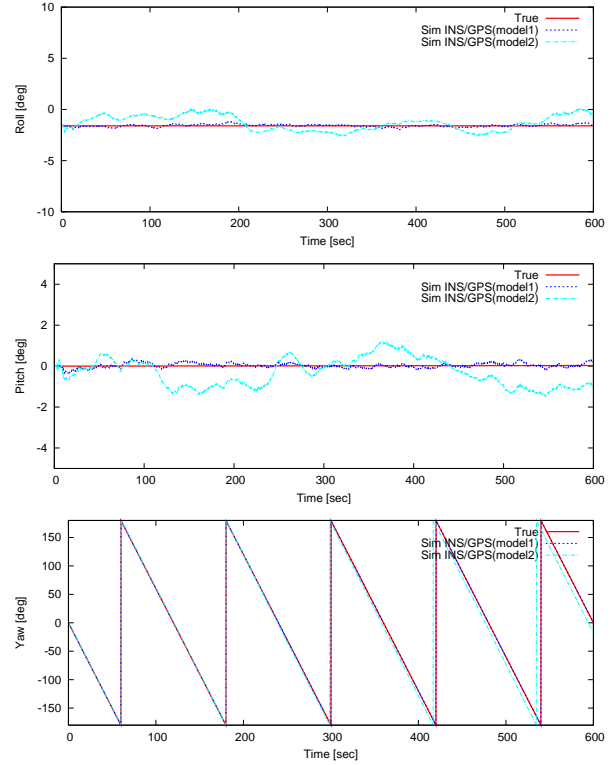


図 4.11: シミュレーション 姿勢履歴 (5 周)

ると

$$\sigma_{\text{bias gyro}}^2 \equiv E [x_{\text{bias gyro}}^2] = \frac{\sqrt{N_{\text{gyro}}}}{2\beta} = \frac{(0.00008)^2}{2 * 0.016} = 2.0 \times 10^{-7} [\text{rad}^2/\text{sec}^2] \quad (4.2.3)$$

よってジャイロのバイアス変動による検出角速度の標準偏差は

$$\sigma_{\text{bias gyro}} = \sqrt{2.0 \times 10^{-7}} \approx 4.4 \times 10^{-4} [\text{rad}/\text{sec}] \quad (4.2.4)$$

である。ところでジャイロを 5 秒間観測し平均した際のホワイトノイズによる検出角速度の標準偏差  $(\sigma_{\text{WN } 0.2\text{Hz}})_{\text{gyro}}$  は

$$\begin{aligned} (\sigma_{\text{WN } 0.2\text{Hz}})_{\text{gyro}} &\equiv (\sigma_{\text{WN } 1\text{Hz}})_{\text{gyro}} \sqrt{0.2\text{Hz}} \\ &= 10^{-3} \sqrt{0.2} = \sqrt{2.0 \times 10^{-7}} \\ &= \sigma_{\text{bias gyro}} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

であり、 $\sigma_{\text{bias gyro}}$  と同じ程度の強さになっている。この 5 秒という時間間隔は Kalman Filter の Time Update や Measurement Update、すなわち慣性センサのサンプリングに伴う更新や GPS の観測による更新タイミングよりも十分に遅い。これによってフィルタの内部ではバイアス変動による効果を区別できないものの、フィルタが発散する程大きな影響を及ぼしてはいないと考えられる。逆にもし  $\sigma_{\text{bias gyro}}$  が大きく、より時間間隔が短い  $(\sigma_{\text{WN } f\text{Hz}})_{\text{gyro}}$  に等しい場合は、ホワイトノイズによる効果とバイアス変動による効果がフィルタ内で同程度効果をもつことになり、モデル化されていないバイアス変動によってフィルタは発散する可能性がでてくると考えられる。

### 4.3 バイアス変動推定の有無による違い

先の水平定常旋回シミュレーションの結果を受けて、元の INS/GPS アルゴリズムと 3.6.4 節で示したバイアス変動推定を行う INS/GPS アルゴリズムの比較を行った。

#### 4.3.1 条件

シミュレーションの条件は前節の条件とほぼ同じである。以下に変更点のみ記す。

- 慣性センサ  
ランダムドリフトを考慮したセンサモデル 2 のみを使用する。
- アルゴリズム  
前節で用いたバイアス推定がない元々の INS/GPS アルゴリズムと、それに対して 3.6.4 節で示したバイアス変動推定機構を組み込んだ INS/GPS アルゴリズムの 2 種類。

#### 4.3.2 結果ならびに考察

図 4.12、図 4.13、図 4.14 に 5 周分の位置履歴、速度履歴、姿勢履歴を示す。

水平面上の履歴から明らかなように、バイアス変動を推定することによってセンサモデル 2 の場合であってもよい結果が得られていることがわかる。これによって 3.6.4 節で述べたバイアス変動推定アルゴリズムの効果を示すことができた。

ここで一点注記をしておく、バイアス変動推定アルゴリズムにおいて、 $\beta$  や  $\sqrt{N}$  を設定する必要があるが、 $\beta$  をセンサモデル 2 で用いた値と同じ値、すなわち 0.016 に設定するとフィルタが発散してしまった。そのため、図に示した結果では  $\beta$  を大きめにとり  $\beta = 0.1$  とした。これは先述したバイアス変動の効果の式 (4.2.2) から明らかなように、 $\beta$  は分散値を設定する際に分子として働くので、 $\beta$  を小さく設定すると、バイアス変動の効果によってもたらされる分散が大きくなりすぎてしまい、発散に繋がったのだと思われる。 $\beta$  を大きめにとったことを多少補うため、 $\sqrt{N}$  についてもセンサモデル 2 で決めた値 0.0008 よりも多少大きめにとり、 $\sqrt{N} = \sqrt{0.00032}$  とした。

### 4.4 Euler 角アルゴリズム、単純線形化アルゴリズムとの比較

前章で本研究で用いた INS/GPS アルゴリズムを説明する際に、他の一般的なアルゴリズムについて触れた。ひとつは位置にオイラー角を用いたアルゴリズム (詳細は D 章) であり、ひとつはシステム方程式は同じだが誤差システム方程式が単純線形化で作られているアルゴリズム (詳細は E 章) である。ここでは本研究で用いたアルゴリズムとそれらの違いをシミュレーションで検証した結果を記す。

<< 後で付け足す >>

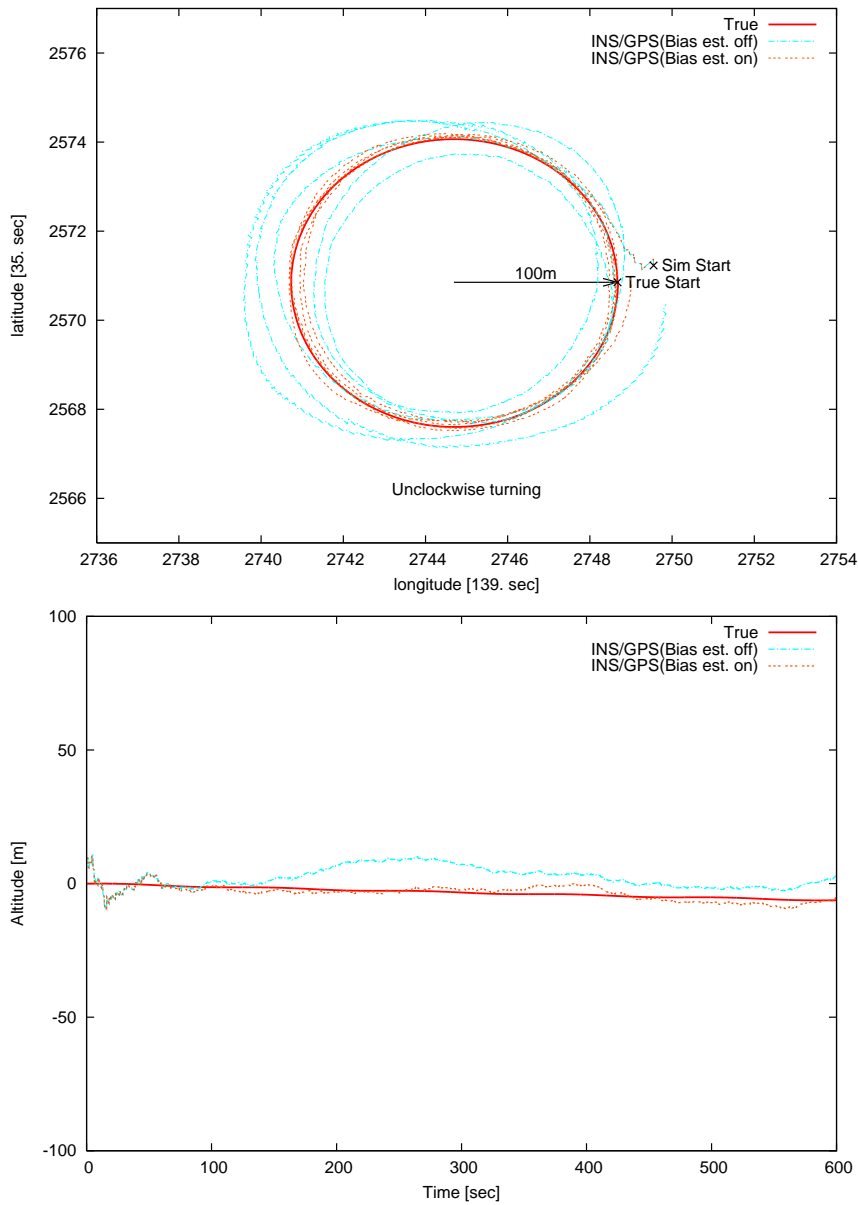


図 4.12: シミュレーション (バイアス変動推定付き) 位置履歴 (5 周)

## 4.5 まとめ

数値シミュレーションを通して本研究で用いた手法の有効性を確認した。現実的な問題に即するには慣性センサや GPS のモデル化が妥当なものであるか検証を行う必要があるが、それが妥当であるという仮定のもとでは以下のことが具体的な結論として挙げられる。

- 精度の低い MEMS 慣性センサを用いても、民生用 GPS 受信機と組合せて INS/GPS を構成することによって十分な精度を有する航法装置を構成可能であることが示せた。

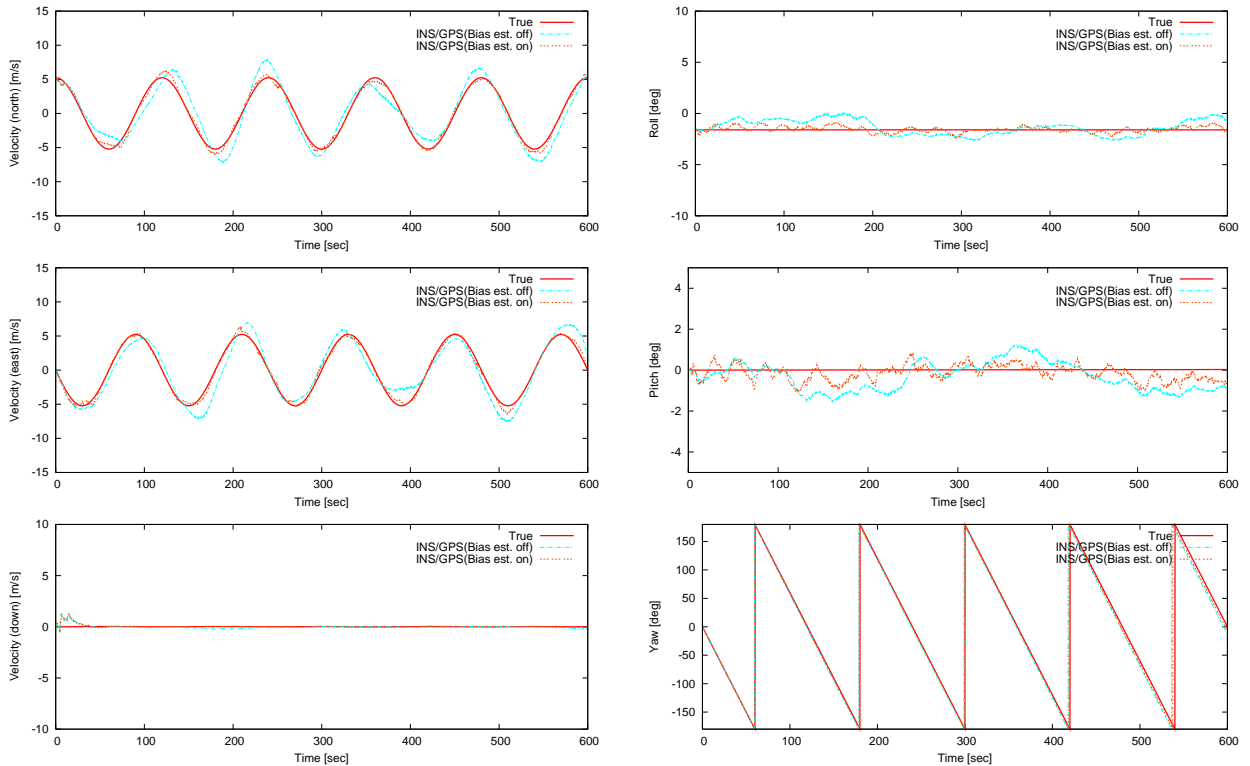


図 4.13: シミュレーション (バイアス変動推定付き) 速度履歴 (5 周)  
 図 4.14: シミュレーション (バイアス変動推定付き) 姿勢履歴 (5 周)

- MEMS 慣性センサのモデルとしてランダムドリフトを行うものを利用したが、ランダムドリフトの効果は精度を落とす程度に留まり、本研究で用いた INS/GPS アルゴリズムを発散させるほどの脅威は持たないことが明らかとなった。
- バイアスを推定するアルゴリズムを用いることによってより高い精度で推定を行うことが可能である。

このシミュレーションの結果を踏まえ、実際にプロトタイプを作成することによって本システムの有効性を検証した。次章ではその実機試験について述べていく。

## 第 5 章

# 実機試験

本研究で提案した INS/GPS システムが精度的に成立しうるものであることは前章の数値シミュレーションによって示されたが、実際に提案したシステムが有効であるかを検証するには、実物を作り評価するのが最も確実な手段である。そこで、実際に MEMS センサや民生用 GPS を利用してプロトタイプを製作し、市販の INS/GPS 装置ならびに高精度 INS/GPS 装置との比較実験を行った。また、比較実験を行う前にいくつかの校正作業を行った。これは精度を求めするためには、現実の慣性センサに存在する問題をできるだけ取り除き、理想的なセンサに近づける必要があるためである。本章ではその実機試験について、作成したプロトタイプの詳細、校正作業、比較実験について順に述べる。

なお比較実験は全部で 3 回行ったが、校正作業を行ったのは 2006 年 3 月末であり、時系列の関係から初回の実験は校正を行わない状態での結果である。また初期の 2 回の実験では比較対象とした機器の精度があまり高くない為、詳細な比較を行うことを避け、定性的な議論のみを行ったことをここに注記する。

### 5.1 作成したプロトタイプ

提案手法を検討するために実際に MEMS 慣性センサや民生用 GPS を用いて INS/GPS プロトタイプを作成した。プロトタイプについて、外観を図 5.1、構成図を図 5.2、構成詳細を表 5.1 にあげる。

使用した MEMS 慣性センサならびに GPS 受信機は非常に小型、軽量である。図 5.3、図 5.4、図 5.5 に使用した MEMS 加速度計、MEMS ジャイロ、GPS 受信機の外観を示す。

プロトタイプには慣性センサとして、3 軸 1 パッケージの MEMS 加速度計が 1 個、ならびに 1 軸 1 パッケージの MEMS ジャイロが 3 個搭載されている。これらは全て直交する必要があるため、立方体をした木材ブロックの各面に取り付けることによってできる限り直角をだした。なお、後で述べる校正作業において取付け誤差は補正されるため、ここでの取付けはおおまかに直角がでてればよいと考えられる。センサの出力については、両慣性センサともアナログ電圧でデータを出力するため、AD 変換機を通してデジタルデータに変換している。慣性演算は 100Hz で行うことを予定していたため、AD 変換機はサンプリング周波数が低くとも量子化誤差が少なく精度が高いものを選定することにした。選定した結果、 $\Delta\Sigma$  タイプの 24bit AD 変換機を採用した。またジャイロが出力する温度も AD 変換機を通して取得することにした。これは後で述べる校正作業において行った温度補正を行うためである。利用した MEMS 慣性センサの単価は 1 個あたり実売で数千円程度であり、様々な民生機器に利用されているものである。

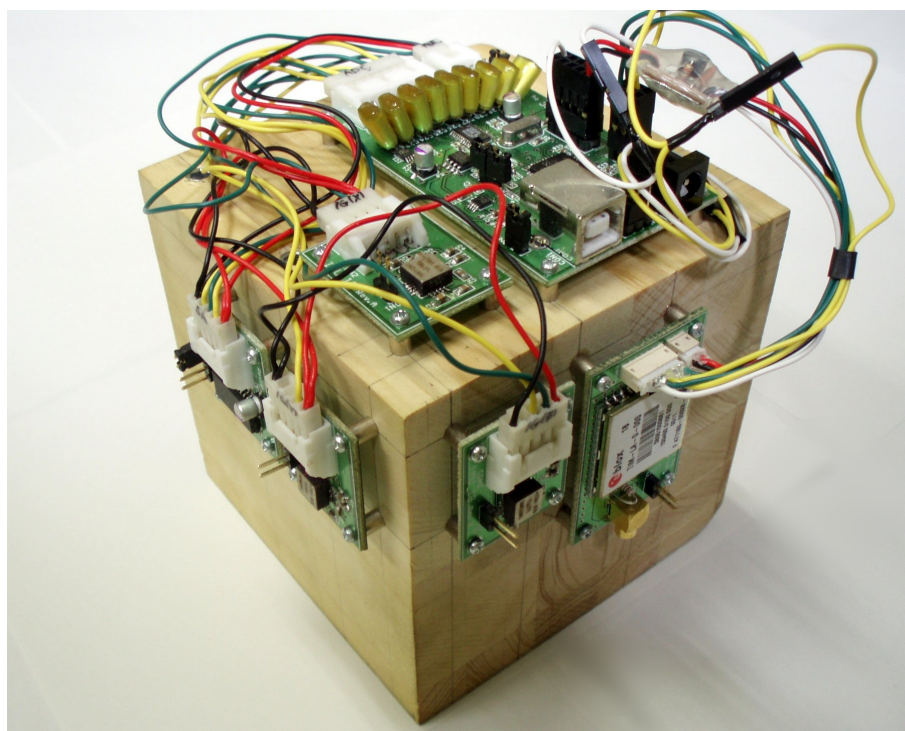


図 5.1: プロトタイプ 外観

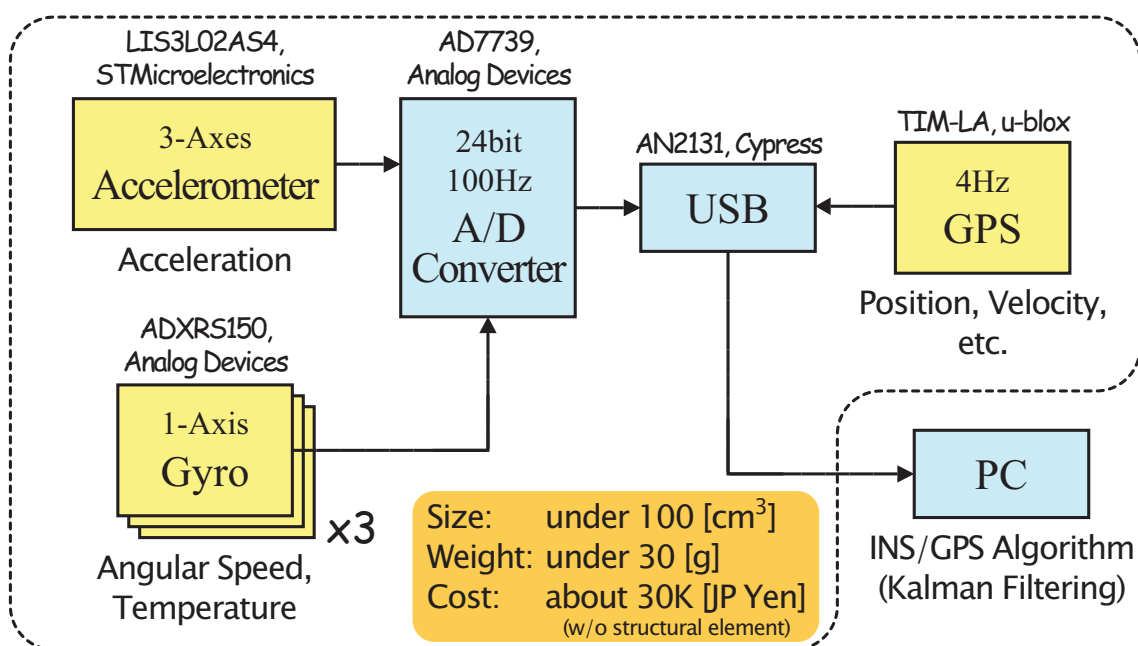


図 5.2: プロトタイプ 構成図



表 5.1: プロトタイプ 構成詳細

構成機器	説明
加速度計	STMicro LIS3L02AS4 1 個 (3 軸 1 パッケージ, MEMS)
ジャイロ	AnalogDevices ADXRS150 3 個 (1 軸 1 パッケージ, MEMS)
温度センサ	ジャイロに内蔵のもの
GPS	u-blox TIM-LA 1 個 (民生用 L1 電波受信 GPS, 4Hz 出力)
A/D 変換機	AnalogDevices AD7739 (100Hz, 24bit 変換)
データ処理	USB で PC と接続
サイズ	100 × 100 × 10mm 以下 (PC, 構造部材を除く)
重量	30 g 以下 (PC, 構造部材を除く)
価格	約 3 万円

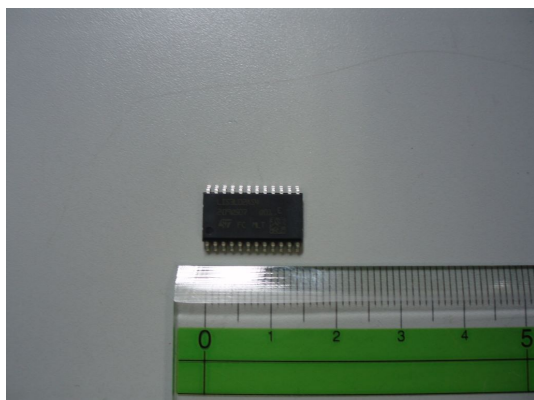


図 5.3: MEMS 加速度計 (LIS3L02AS4)



図 5.4: MEMS ジャイロ (ADXRS150)



図 5.5: プロトタイプで用いた GPS 受信機 (TIM-LA)

プロトタイプの GPS 受信機は、L1 電波を受信しコード測位を行う一般的な民生用受信機である。図 5.3、図 5.4 に使用した GPS 受信機の外観を示す。特徴的なのは位置や姿勢といった処理された情報に加え、デルタレンジやドップラー周波数といった下位の処理情報、ならびに搬送波位相や信号強度といった生データを出力することが可能である。これらの下位情報は後で専用ソフトウェアで処理することによって、より精度の高い情報を抽出することが可能である。またもうひとつの特徴として測位を最大 4Hz で行うことが可能であり、今回はその最大頻度である 4Hz でデータを取得した。出力はすべて UART(Universal Asynchronous Receiver Transmitter) 方式で行われ、今回は 57600bps で通信を行った。アンテナには MCX コネクタ接続の小型アクティブアンテナを利用した。アンテナを設置する際は電位を安定化させるために 10 cm 角の銅版の上に設置した。価格は受信機単体で実売で 1 個 1 万円程度であり、アンテナは 3 千円程度であった。

AD 変換された慣性センサ出力や温度データ、ならびに GPS の出力データは全て USB を処理することができるマイコンに集められ、PC に転送される。このマイコンは PC と USB で接続され USB スレーブデバイスとして機能する。規格としては USB 1.1 Full speed に対応しており、理論的には最大 12Mbps で PC と通信を行うことができる。この帯域は今回のデータ転送には十分である。2 台をハブ接続しても問題なく通信を行うことができた。

マイコンの先に接続された PC では、データ取得ならびに今回提案した INS/GPS アルゴリズムによる処理を行う。簡単のため、リアルタイムでデータ取得のみを行い、後にオフラインでアルゴリズムをまわすことにより INS/GPS を構成した。なおこの PC の機能はマイコンの計算機能を強化した半導体である DSP などを利用することによって、リアルタイム化、小型化することが可能である。

以上がプロトタイプについての説明である。実際に作成したものをみると、PC や構造部材を除いて重量が 30g 以下、大きさが 100cm<sup>3</sup> 以下であったことから考えるに、提案したシステムは汎用的に使用するのに十分小さく軽く経済的であると考えられる。

## 5.2 較正作業

実際にプロトタイプを用いて実験を行う前に、慣性センサの温度特性ならびに取付け誤差を測定し較正作業を行った。較正対象としてこれら 2 点を選択した理由は、性能を低下させる主たる原因がこれら 2 点に集約されると考えた為である。第一に、MEMS センサは簡易的なセンサであるため、使用する環境の温度によってその特性が大きく変化することが知られている。第二に、プロトタイプではセンサの主軸が正確に直交して取付いているわけではない。これら 2 点は INS 単体、ひいてはシステム全体の性能に大きく影響するものと考えられる。実際、温度補正は参考文献 [4] [5]、取付け誤差補正については参考文献 [1] 第 9 章に記述がある。

調達できた較正用機器の関係から、加速度計ならびにジャイロのゼロ点の温度特性とジャイロの取付け誤差を評価した。以下ではその詳細について述べる。



### 5.2.1 加速度計、ジャイロのゼロ点の温度特性

ゼロ点の温度特性は恒温槽にプロトタイプを静置し、温度を変化させることで結果を取得した。測定されたデータを図 5.6、5.7 に示す。縦軸、横軸とも AD 変換機の直値であり、縦軸がセンサの出力値、横軸が温度をあらわしている。

いずれのセンサも温度とゼロ点の変動には線形関係があることが見て取れる。測定結果より求められた結果を表 5.2 に示す。

表 5.2: ゼロ点 温度特性

センサ	X 軸	Y 軸	Z 軸
加速度計 [m/s <sup>2</sup> /°C]	-0.000763	0.0223	0.00602
ジャイロ [deg/°C]	0.0575	-0.0881	-0.0191

### 5.2.2 ジャイロの取付け誤差

ジャイロの取付け誤差の測定は、一定速度で回転するレートテーブル上にプロトタイプを固定し計測を行うことにより求められる。測定中の様子を図 5.8 に示す。

測定原理であるが、例えば x 軸ジャイロの主軸方向の単位ベクトル、スケールファクタをそれぞれ  $\vec{u}_x$ 、 $K_x$ 、ある取付け面 (1 面のように表記) の法線単位ベクトルを  $\vec{u}_{01}$ 、1 面を基準面としたときの x 軸ジャイロの出力値を  $\vec{a}_{x1}$  のように表記すれば、1 面、2 面、3 面について次の関係が存在する。

$$\begin{bmatrix} \frac{\vec{a}_{x1}}{K_x} & \frac{\vec{a}_{y1}}{K_y} & \frac{\vec{a}_{z1}}{K_z} \\ \frac{\vec{a}_{x2}}{K_x} & \frac{\vec{a}_{y2}}{K_y} & \frac{\vec{a}_{z2}}{K_z} \\ \frac{\vec{a}_{x3}}{K_x} & \frac{\vec{a}_{y3}}{K_y} & \frac{\vec{a}_{z3}}{K_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{01}^T \\ \vec{u}_{02}^T \\ \vec{u}_{03}^T \end{bmatrix} [\vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z] \quad (5.2.1)$$

従って  $\vec{u}_{01}$  等が既知である (例えば直交する) 3 つの面それぞれについて計測を行えば、 $\vec{a}_{x1}$  等が計測され、 $|\vec{u}_x| = 1$  等の条件から  $K_x$  等が求められると同時に、取付け誤差をあらわす  $\vec{u}_x$  等が求められる。

測定結果を図 5.9 にあげる。どれにおいても本来感度がないはずである軸に対しても角速度が検出されてしまっており、取付け誤差があることがわかる。これを解析的に処理し、取付け誤差を求めた結果を表 5.3 にあげる。

## 5.3 2005 年 11 月 調布セスナ実験

2005 年 11 月に調布飛行場でセスナをチャーターし、実験を行った。

実験の内容は作成したプロトタイプと市販の INS/GPS 装置である Crossbow 社製『NAV420』(以下 NAV420 と表記する) との比較である。NAV420 は 3 軸の加速度計、3 軸のジャイロ、ならびに 3 軸の地

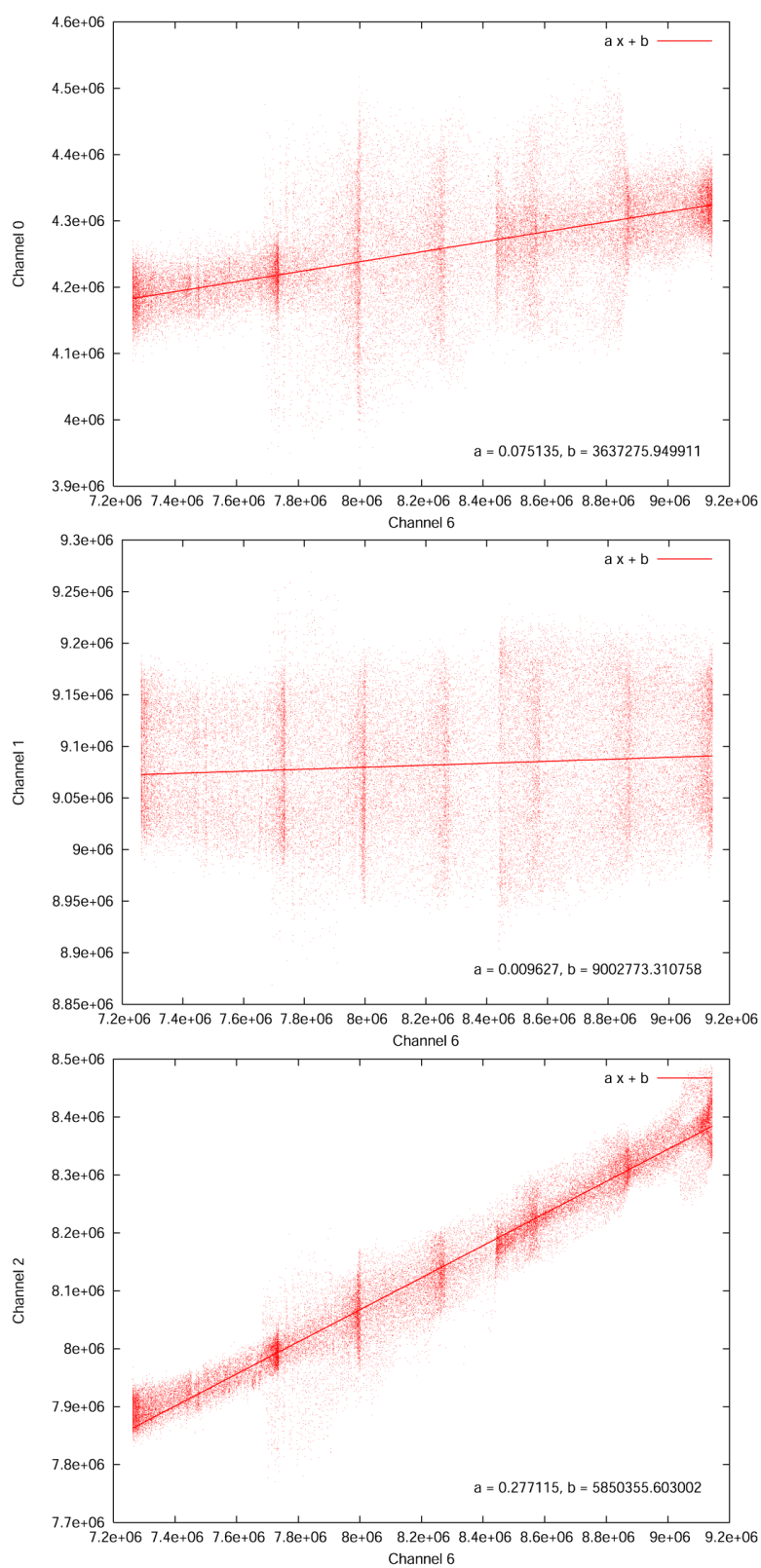


図 5.6: 加速度計 ゼロ点 温度特性

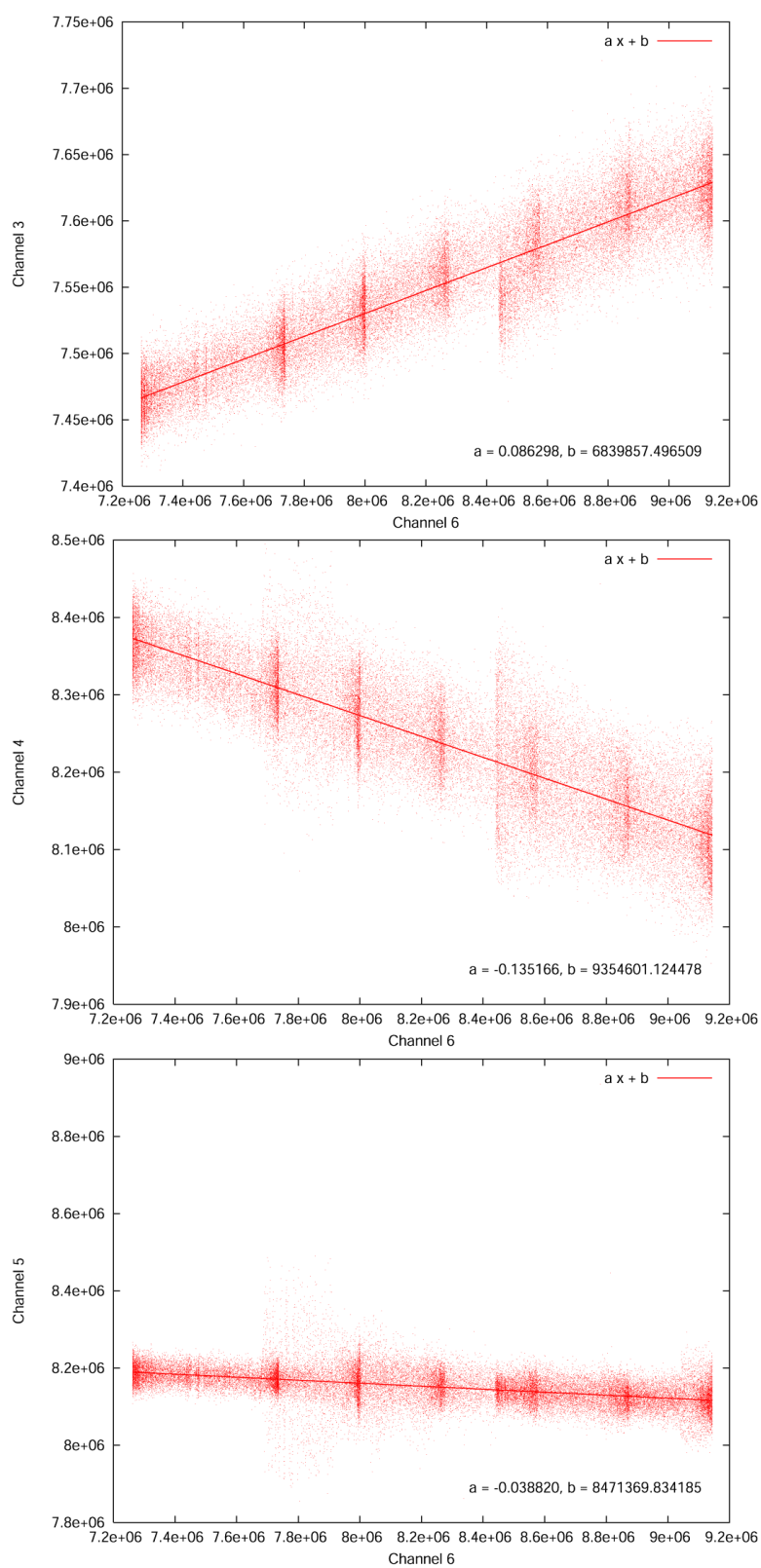


図 5.7: ジャイロゼロ点温度特性



図 5.8: ジャイロ取付け誤差計測

表 5.3: ジャイロ取付け誤差 解析結果

	X 軸	Y 軸	Z 軸
$\vec{u}$	1.00	$8.72E^{-3}$	$-1.18E^{-2}$
	$-9.43E^{-3}$	1.00	$4.91E^{-3}$
	$1.52E^{-3}$	$1.24E^{-2}$	1.00
取付け誤差 [deg]	0.547	0.868	0.731

磁気センサを有しており、それと GPS を Kalman Filter で統合することによって航法機器として機能している。図 5.10、図 5.11 に NAV420 の概略図を示す。

NAV420 の内部でどのようなアルゴリズムを用いているかは公表されていないが、4 衛星以上 GPS 衛星を捕捉しないと補正が行われていないようであり、この事実から想像するにおそらく本研究で用いた Kalman Filter の設定と同じ Loose coupling によって統合が行われていると思われる。加えて地磁気センサを積んでいることから、本研究で用いた方法では不可能である姿勢に対する直接的な補正を行っていると考えられる。

価格についていえば、NAV420 の価格は百万円程度であり航空宇宙用途の INS/GPS 機器からみれば非常に安価であり、汎用用途に向けた INS/GPS 装置の草分け的存在である。そのため、精度も航空宇宙用

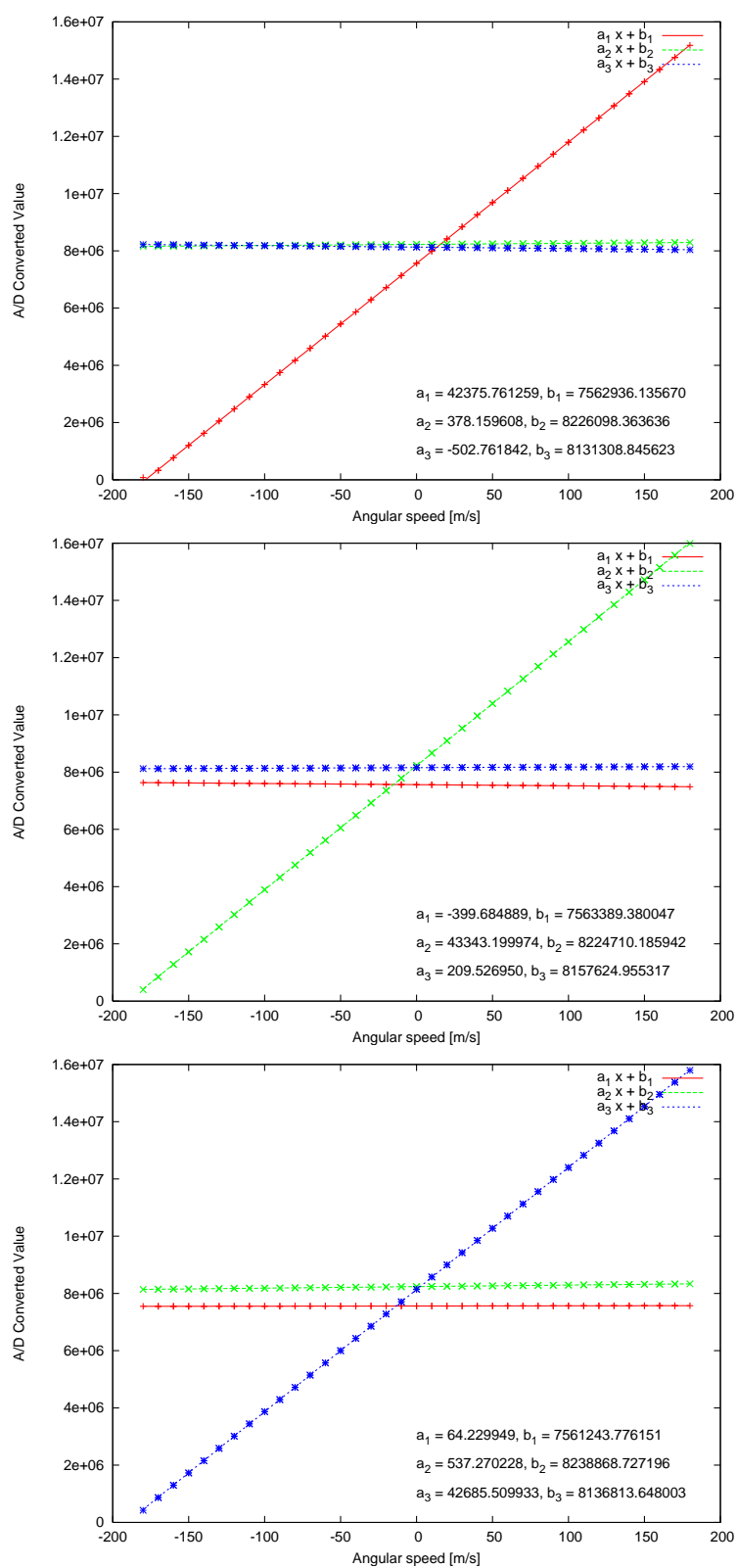


図 5.9: ジャイロ取付け誤差 測定結果



図 5.10: Crossbow NAV420

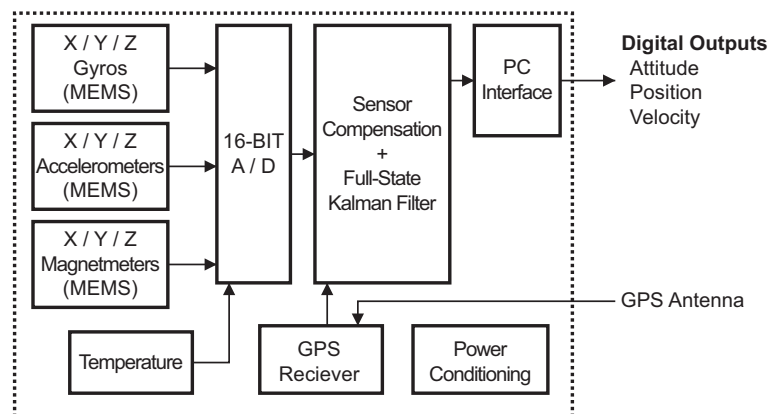


図 5.11: Crossbow NAV420

途に比べれば見劣りがする。表 5.4 に NAV420 の性能緒言 [15] を示す。

この NAV420 とプロトタイプを軽飛行機であるセスナに設置した状態で調布飛行場周辺を飛行し、その飛行履歴を取得した。このときプロトタイプと NAV420 はセスナ後方部に設置したが、慣性力の検出が同じ条件になるために、できる限り接近して設置するようにした。また振動をあまり拾わないよう、防振の意味を含めて厚さ数  $mm$  のゴムを通してネジ止めで設置した。また GPS アンテナはプロトタイプと NAV420 で分配器を通して共通のものを利用し、また受信環境を最良にするため機外に設置した。図 5.12 に実験の様子を、図 5.13 に設置状況を記す。

NAV420 との比較結果を図に示す。実験は 20 分間の飛行をストップアンドゴー (着陸、停止、再び離陸) で 3 回繰り返すものであり、それぞれの飛行に分けて記す。位置履歴、速度履歴、姿勢履歴の順に、図 5.14、図 5.15、図 5.16 が 1 回目の飛行、図 5.17、図 5.18、図 5.19 が 2 回目の飛行、図 5.20、図 5.21、図 5.22 が 3 回目の飛行である。

図よりプロトタイプは NAV420 とほぼ同じ出力をしているのがわかり、NAV420 と同等の性能を有し



表 5.4: Crossbow NAV420 の性能緒言

項目	仕様
位置精度	3 m (CEP、50% の確率)
X, Y 速度精度	< 0.4 m/s (GPS 受信時)
Z 速度精度	< 0.5 m/s (GPS 受信時)
方位角 (ヘディング)	±3 deg (rms)
姿勢角 (ロール、ピッチ)	±0.75 deg (rms、GPS 受信有) / ±2.5 deg (rms、GPS 受信無)
角速度ランダムウォーク	< 4.5 deg/ $\sqrt{\text{hr}}$
加速度ランダムウォーク	< 1.0 m/s/ $\sqrt{\text{hr}}$
更新周期	2 – 100 Hz
安定化時間	60 sec
外形	76.2 × 95.3 × 76.2 mm
重量	< 0.58 kg



図 5.12: 2005 年 11 月 実験の様子

ていると考えられる。細部をみるとピッチなどでオフセットが生じているが、これは取付け誤差による影響だと考えられる。

## 5.4 2006 年 4 月 竜ヶ崎セスナ実験

2005 年 11 月のセスナ実験と同じく、2006 年 4 月に竜ヶ崎飛行場でセスナを用いて NAV420 との比較を行った。他の実験との乗合い実験であったため、本実験を行う意義は前回の調布セスナ実験から特に変

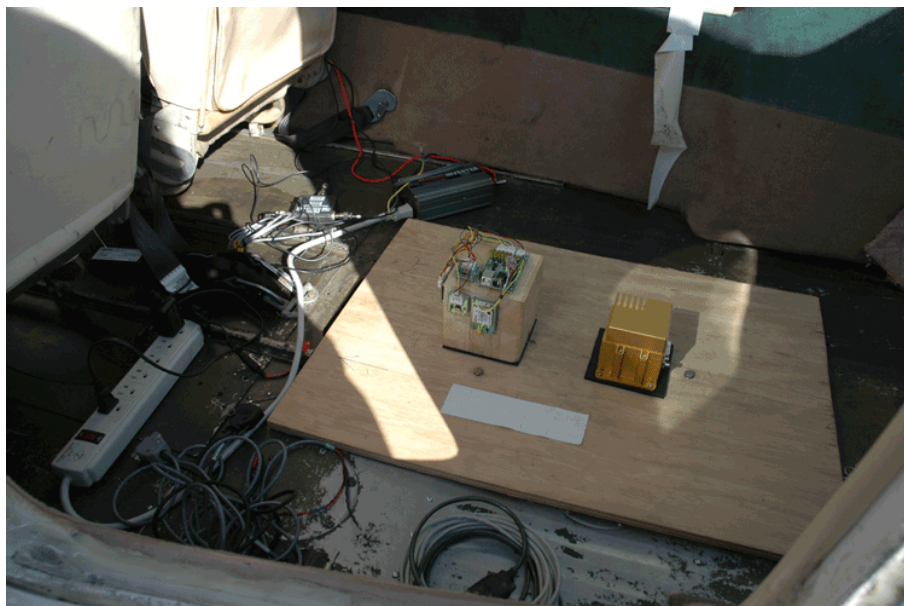


図 5.13: 2005 年 11 月 プロトタイプ (左) と NAV420(右)

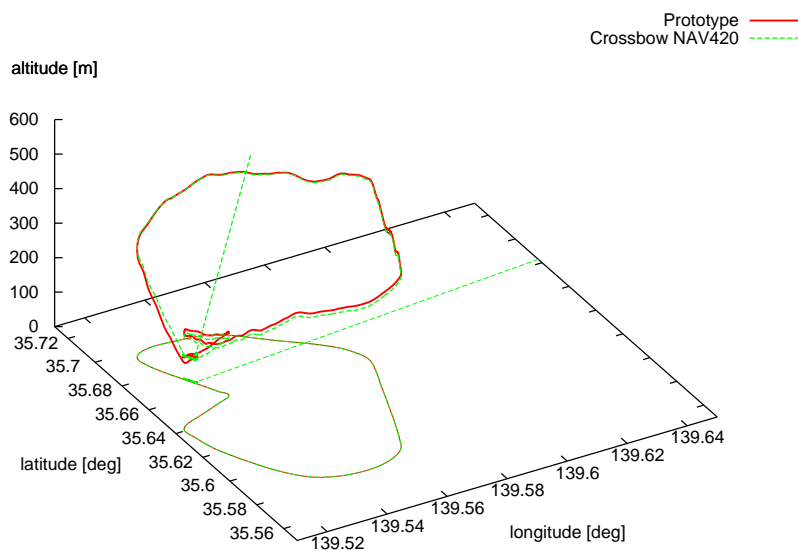


図 5.14: NAV420 との比較実験 位置履歴 (2005 年 11 月 1 回目)



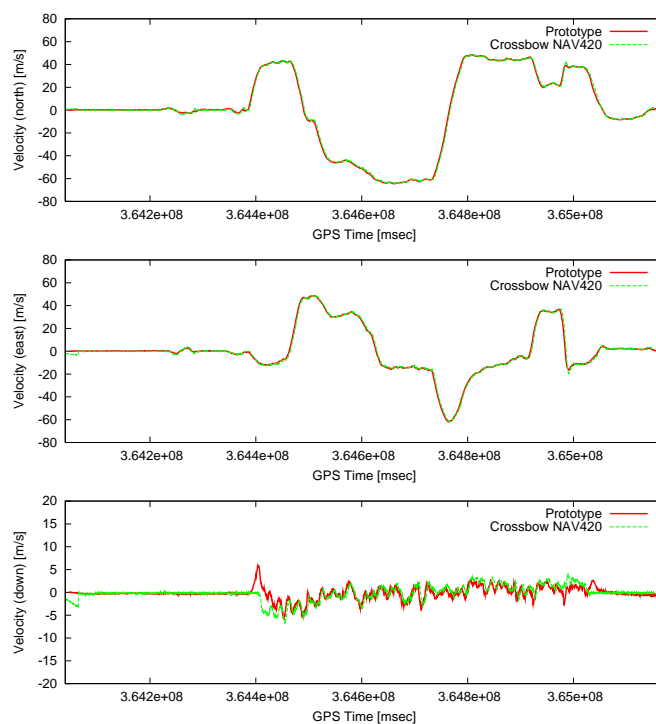


図 5.15: NAV420 との比較実験 速度履歴 (2005 年 11 月 1 回目)

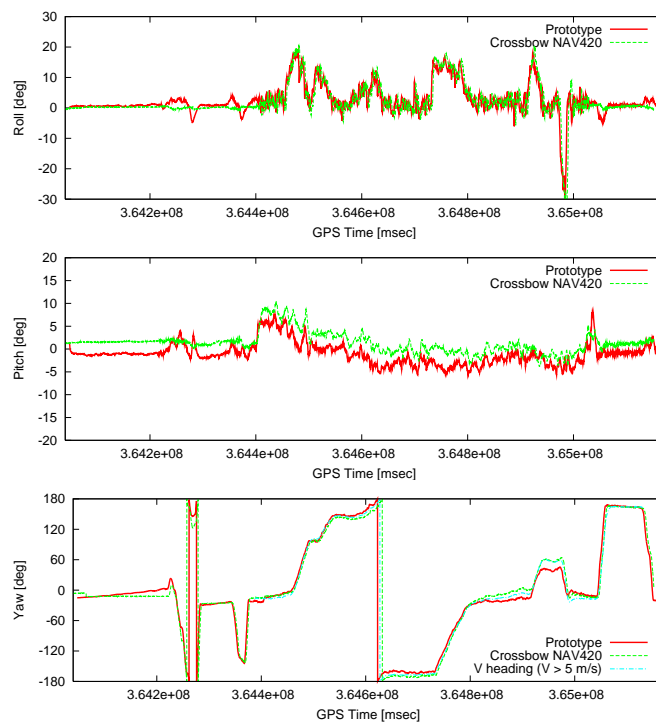


図 5.16: NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2005 年 11 月 1 回目)

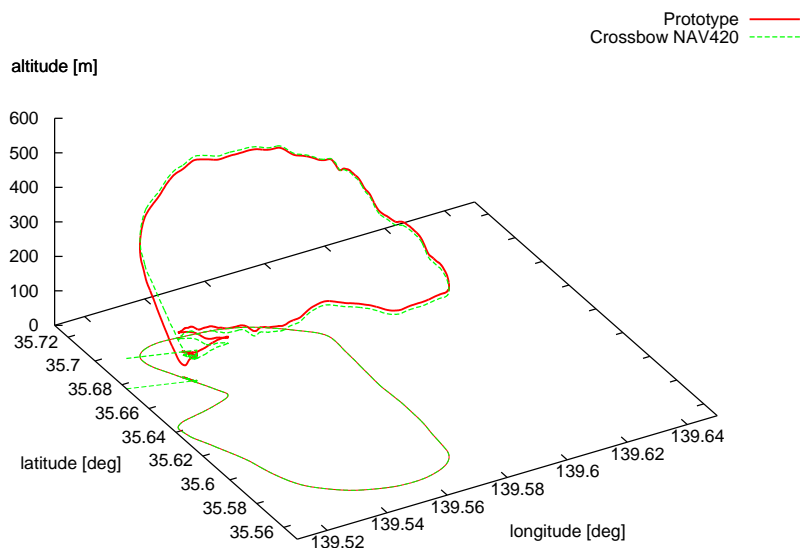


図 5.17: NAV420 との比較実験 位置履歴 (2005 年 11 月 2 回目)

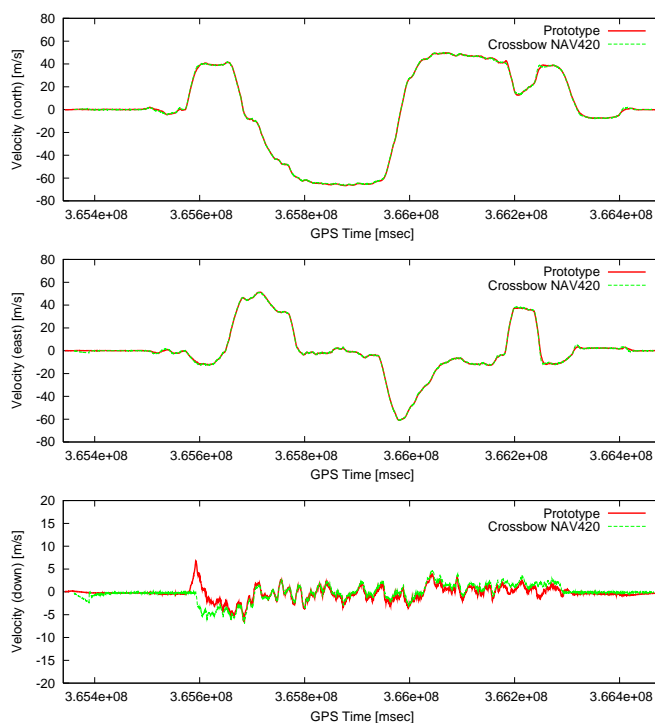


図 5.18: NAV420 との比較実験 速度履歴 (2005 年 11 月 2 回目)

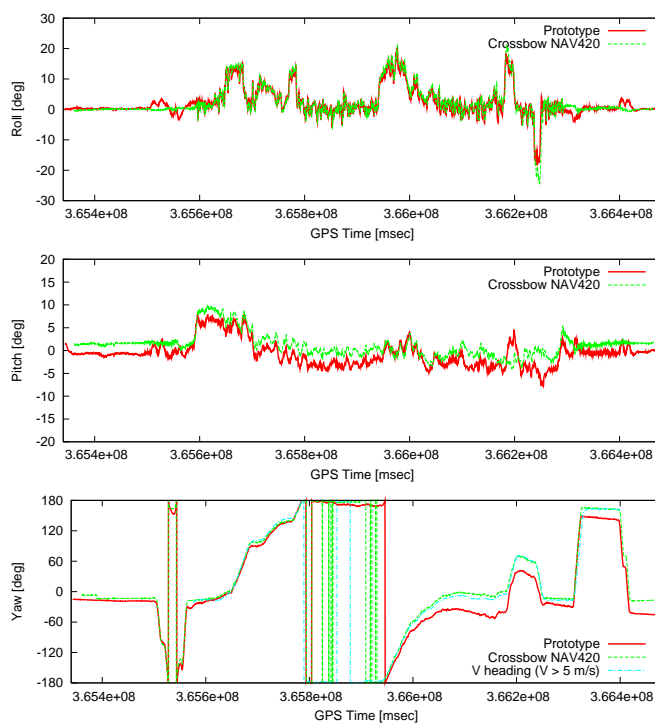


図 5.19: NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2005 年 11 月 2 回目)

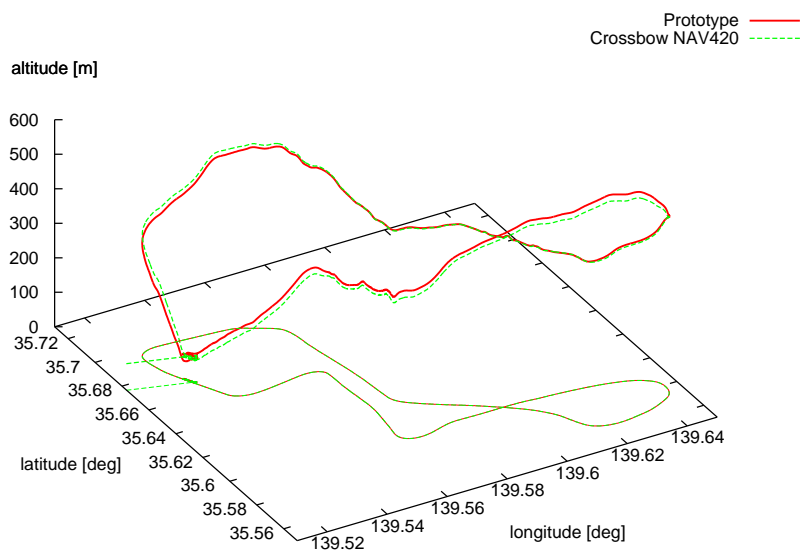


図 5.20: NAV420 との比較実験 位置履歴 (2005 年 11 月 3 回目)

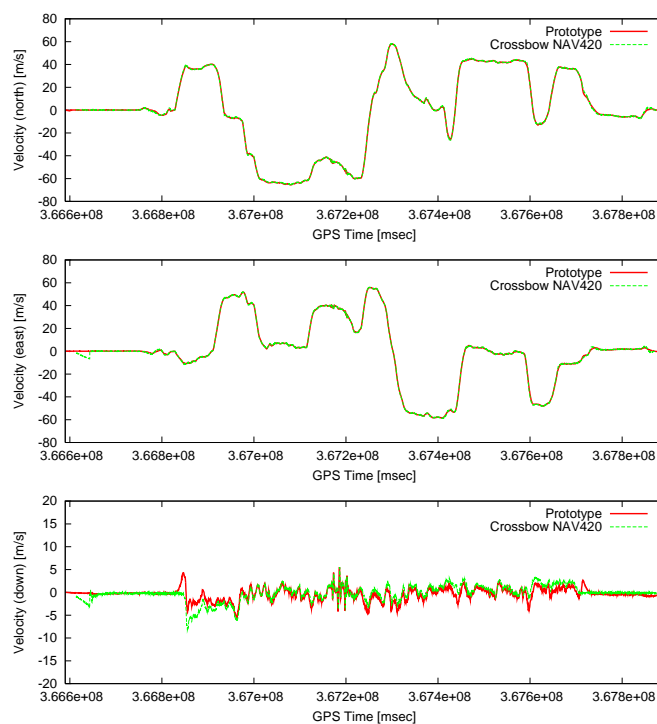


図 5.21: NAV420 との比較実験 速度履歴 (2005 年 11 月 3 回目)

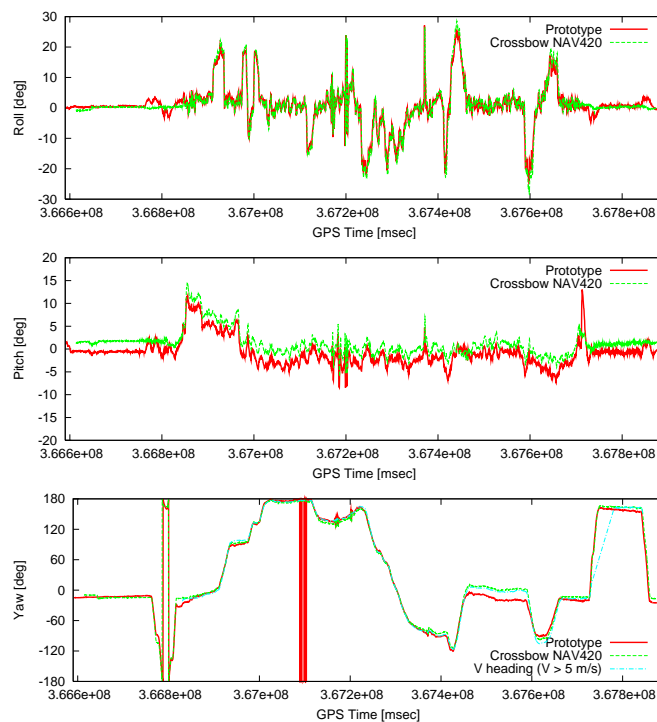


図 5.22: NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2005 年 11 月 3 回目)

化した点はないが、複数の実験結果を示すことは本研究の信頼性を示す点で有効であると考えるので、ここに結果を記す。

結果は図 5.23、図 5.24、図 5.25 に示すとおりであるが、途中から NAV420 の姿勢結果が発散してしまっている (NAV420 のヘディングの結果は発散が激しかったため、図には記載していない)。飛行時間はおよそ 40 分間であった。この実験では定常的な旋回 (バンク角が一定) を行ったが、この運動は本来の重力ベクトルと異なる方向にみかけの重力が作られるため、航法装置にとっては最も過酷な試験の一つである。おそらく NAV420 は姿勢検出に地磁気も利用しているため、地磁気と INS が算出する重力方向が矛盾を起し、それが内部的にうまく処理をされず、発散に至ったのであろう。

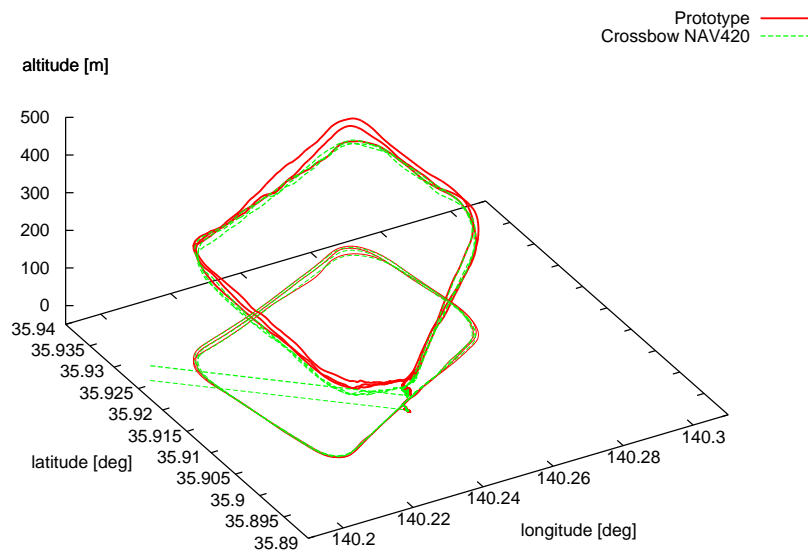


図 5.23: NAV420 との比較実験 位置履歴 (2006 年 4 月)

ところで NAV420 が発散してしまったのに対し、プロトタイプは発散せずに済んだ。このことから本研究で提案したアルゴリズムは NAV420 よりも信頼性が高いと言える。また、NAV420 が発散する可能性があるということがわかったため、今後の実験ではより信頼性ならびに精度が高い航法装置をリファレンスとして利用するのが望ましいと結論付けられる。

## 5.5 2006 年 6 月 調布飛行場 MuPAL- $\alpha$ 実験

2006 年 6 月に調布飛行場にて、宇宙航空開発研究機構 (JAXA) 所有の高精度 INS/GPS 装置である GAIA[12] との比較実験を行った。GAIA の精度は絶対位置で 1m 以内と、リファレンスとして十分に信頼できる精度を有する装置であり、前回の竜ヶ崎セスナ実験でのリファレンスにはより精度が高い機器を利用すべきであるという教訓を実現できることとなった。また、実験に際しては JAXA 所有の実験用航空機 MuPAL- $\alpha$  を用い、プロトタイプと GAIA を搭載した状態で水平定常飛行や旋回定常飛行等を行った。

GAIA ならびに MuPAL- $\alpha$  の外観を図 5.26、図 5.27 に示す。またプロトタイプの MuPAL- $\alpha$  機内への

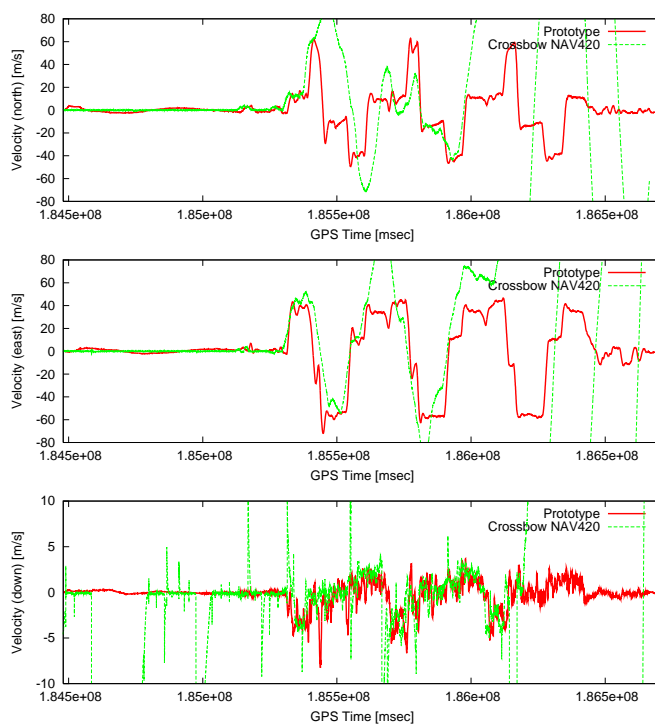


図 5.24: NAV420 との比較実験 速度履歴 (2006 年 4 月)

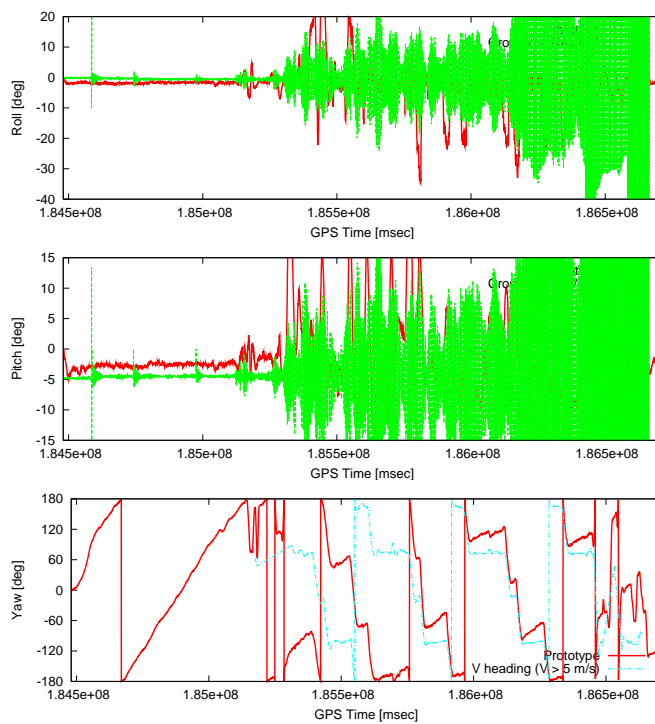
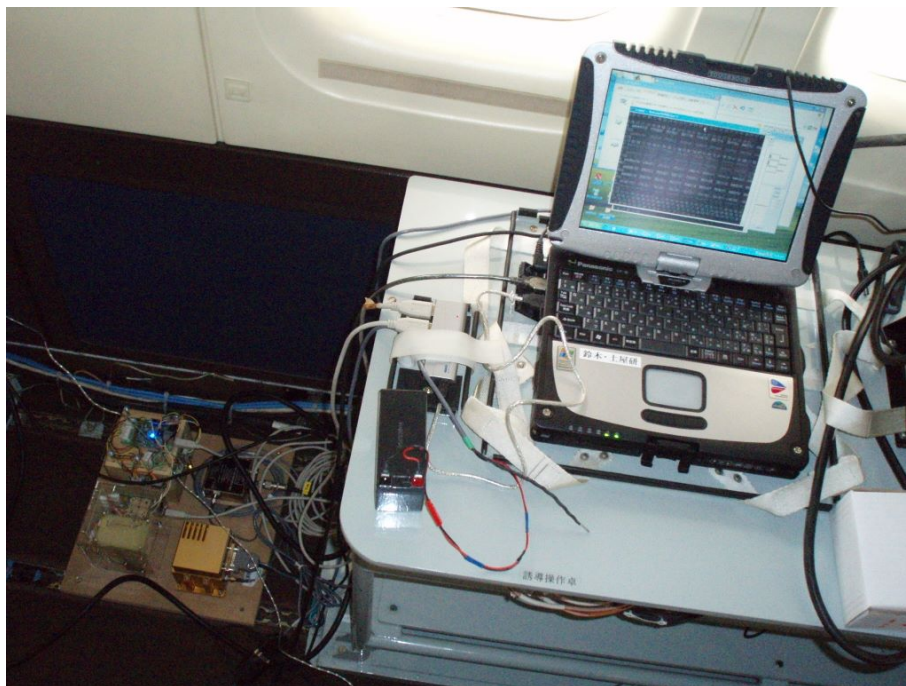


図 5.25: NAV420 との比較実験 姿勢履歴 (2006 年 4 月)

取付けを図 5.28 に示す。プロトタイプは木材の板を介して MuPAL- $\alpha$  内の客席取付けレールにネジ止めで固定した。またプロトタイプと GAIA の GPS アンテナは共通とし、分配器を通してそれぞれの GPS 受信機に配線した。



図 5.26: GAIA

図 5.27: MuPAL- $\alpha$ 図 5.28: プロトタイプ MuPAL- $\alpha$  機内への設置状態

飛行は2時間程度行った。表 5.5 に飛行プランの特徴的な部分を記す。

本実験はリファレンスとして用いる GAIA が非常に高性能であり、また様々な生データも含めた様々な値を出力する機構であったため、アルゴリズムを換えたり、生データを比較したりと様々な評価を行った。なおこれまでの実験と同じく Crossbow も搭載したが結果が発散してしまい比較対象としては不適當であった。以下、それぞれについて順に述べる。



表 5.5: MuPAL- $\alpha$  飛行計画

ケース	開始 GPS 時刻 [ $10^8$ msec]	終了 GPS 時刻 [ $10^8$ msec]	備考
水平直線定常飛行	3.56534	3.57134	
水平定常旋回 ( $\phi = 10$ deg)	3.57866	3.58609	3 周、左旋回
定常降下 (-1000 fpm)	3.58864	3.58954	
定常上昇 (1000 fpm)	3.58979	3.59097	
水平定常旋回 ( $\phi = 15$ deg)	3.60369	3.60953	3 周 右旋回
水平減速 (120kt $\rightarrow$ 100kt)	3.61143	3.61161	
水平加速 (100kt $\rightarrow$ 140kt)	3.61180	3.61218	

### 5.5.1 これまでの実験と同じアルゴリズムでの比較

まず、これまでのアルゴリズムと同じアルゴリズムによって処理した結果を示す。図 5.29、図 5.30、図 5.31 はそれぞれ位置履歴、速度履歴、姿勢履歴である。

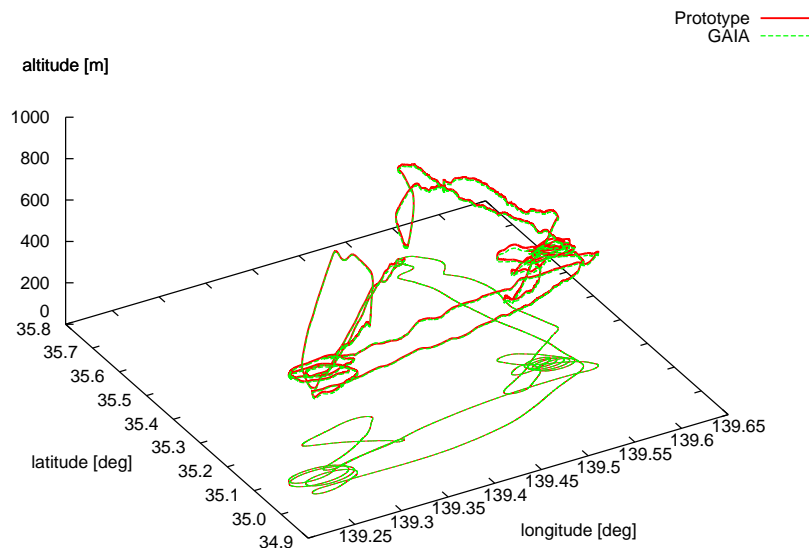


図 5.29: GAIA との比較実験 位置履歴

それぞれの図から明らかなように、プロトタイプと GAIA でほぼ同じような出力が得られていることが見て取れる。履歴の開始時からしばらくは GAIA と一致していないが、これはプロトタイプで用いたアルゴリズムの中の Kalman Filter が収束に要する時間であると考えられ、妥当な結果であるといえる。

より詳しく結果を分析するため、GAIA との差異を統計的に処理した。その結果を表 5.6 に示す。なお差異を計算するについては、プロトタイプと GAIA の取付け位置による差のみを考慮、補正してある。こ



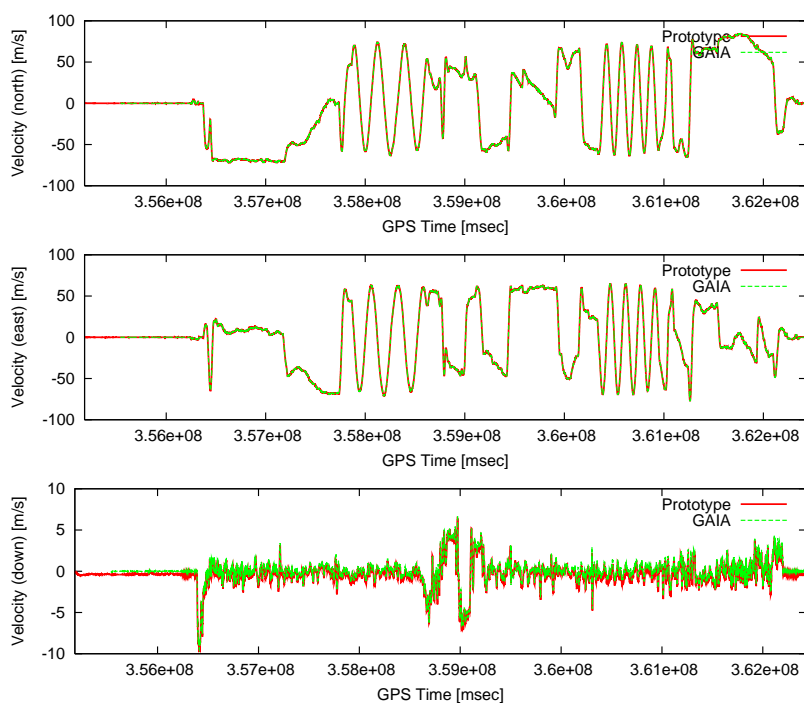


図 5.30: GAIA との比較実験 速度履歴

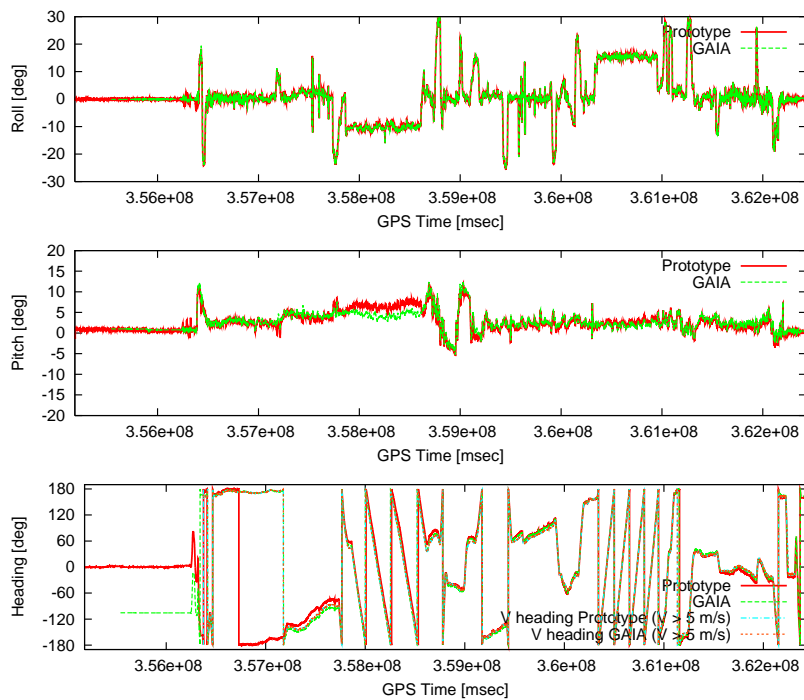


図 5.31: GAIA との比較実験 姿勢履歴

これはプロトタイプと GAIA の取付け傾きを計測することができなかったためであり、姿勢についてはその分オフセットが発生している可能性があることをここに注記しておく。加えて統計量を計算するのに用いたデータは、アルゴリズムで用いた Kalman Filter が収束するのに必要な時間を考慮して GPS 時刻で  $3.58 \times 10^8$ [msec] 以降の値である。

表 5.6: プロトタイプと GAIA の差異  
(GPS Time 3.58E+08[msec] 以降)

	平均値	標準偏差	最悪値
水平距離 [m]	5.39	2.17	10.6
高度 [m]	8.80	4.49	18.1
北方向速度 [m/s]	0.00252	0.132	1.44
東方向速度 [m/s]	-0.00466	0.130	-1.29
重力方向速度 [m/s]	-0.327	0.171	-0.932
ロール [deg]	-0.00907	0.227	-0.913
ピッチ [deg]	0.105	1.01	3.22
ヘディング [deg]	1.61	6.96	19.0

GAIA の値を真値として以下の議論を進める。

まず位置や速度といった GPS 受信機から直接の補強が得られる状態量については、多少のオフセットが発生してしまっているものの、非常によく推定できている。まず位置についてであるが、最悪値を見ても水平方向でほぼ 10m 以内を実現できている。平均値と標準偏差をのみを見れば本システムで当初目標性能とした位置で数 m 以内という性能を達成できていることがわかる。高度方向については多少精度が劣化し 20m 程度であるが、これは GPS が性能的に水平方向よりも高度方向に精度が劣化していることを考えれば納得がいく値である。

速度についてもプロトタイプと GAIA でほぼ差異がない。GPS 受信機による直接的な補強が非常に寄与しているものだと考えられる。

姿勢についていえば、ロール、ピッチでは非常によく推定ができているといえる。先述したとおり、プロトタイプと GAIA の取付け傾きが測定できていないことから標準偏差のみを利用して議論を行うと、ロール、ピッチの精度は約 1 度程度であると考えられる。一方ヘディングであるが、こちらは標準偏差で 7deg も誤差がある。この差異を詳しく見るため、ヘディングを速度方向との差、すなわち対地速度に対する横滑りで見ることにした。図 5.32 に対地速度に対するプロトタイプと GAIA の横滑りの比較を示す。

ヘディングの誤差はドリフトをおこしてしまっていることが図から読み取れる。これは明らかにロールやピッチの誤差で見られたホワイトノイズ的な誤差とは異なるものである。

このことは以下のように考察される。まず同じ姿勢であっても、ロールやピッチは対象物体が加速によって受ける加速度よりもはるかに大きい加速度である重力を頼りにすることによって補正を行うことが可能である。つまり加速環境下においても、その状態が水平定常旋回運動のように定常的なものでない限りは、重力を参考にすることによってロールやピッチも精度は粗いながら求めることは可能である。一方、ヘディングは地球の自転速度以外に特にリファレンスはない。言い換えれば、たとえ静止状態であっ

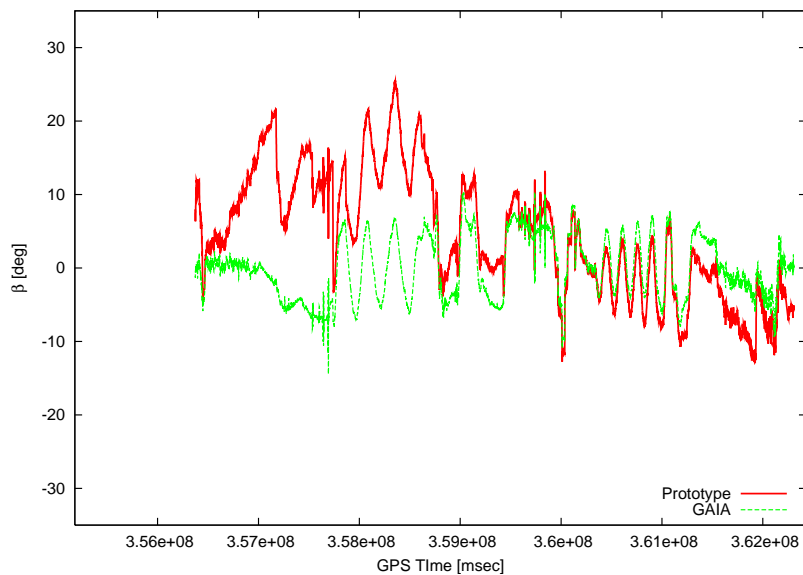


図 5.32: 2006 年 6 月 GAIA との比較実験 対地速度に対する横滑り履歴

でも精度が悪いジャイロでは地球の自転角速度を捕らえることができず、3.6.2 節で示したようにある仮定を設けて初動時の速度ベクトルから決定を行うしかない。これよりヘディングの悪さはプロトタイプと GAIA とで利用している慣性センサ、特にヘディングは姿勢であるからジャイロの違いが最も現れていると考えられる。

このような結果ならびに考察を踏まえて、次にプロトタイプと GAIA の慣性センサ、それぞれの出力の比較を行った。

### 5.5.2 プロトタイプと GAIA の慣性センサ出力比較

全履歴におけるプロトタイプと GAIA の慣性センサの出力を比較した。図 5.33 に加速度計の出力値の比較を、図 5.34 にジャイロの出力値の比較を示す。

加速度計はプロトタイプと GAIA でさしたる差がないことが見て取れる。一方のジャイロでは、GAIA がプロトタイプに比べてはるかに性能が勝っていることが見て取れる。

これより前節で得られた、プロトタイプで特にヨー方向の精度が悪いという結果は、ジャイロの違いによるものだという考察が裏付けられた。このことを踏まえて、少しでもヘディングを改善する方法がないか考えてみることにした。

数値シミュレーションで示したとおり、計算負荷があがるものの、バイアス変動を推定することによって精度が改善した事例がある。そこで次にバイアス変動推定を元のアルゴリズムに加えた 3.6.4 節の INS/GPS アルゴリズムで処理を行ってみることにした。

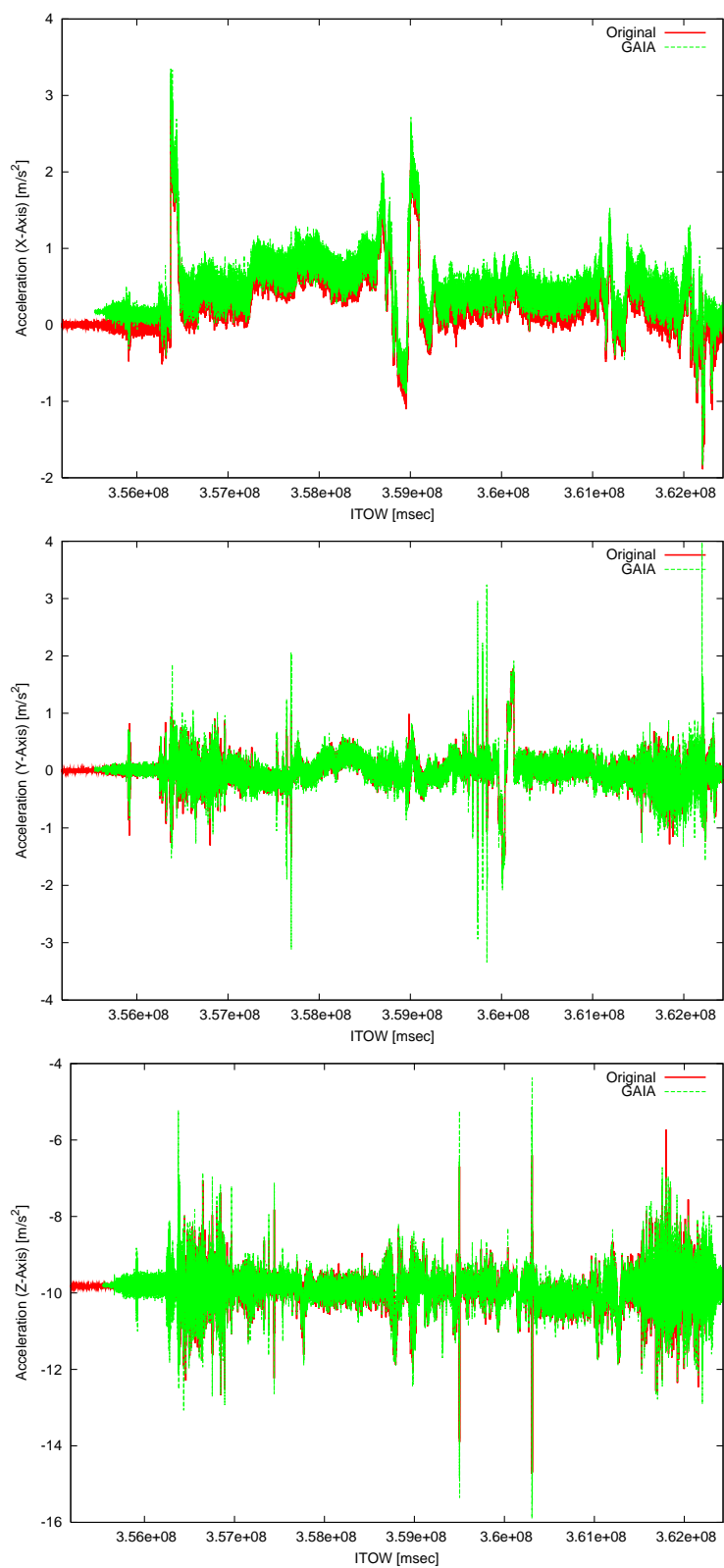


図 5.33: 加速度計 出力値比較

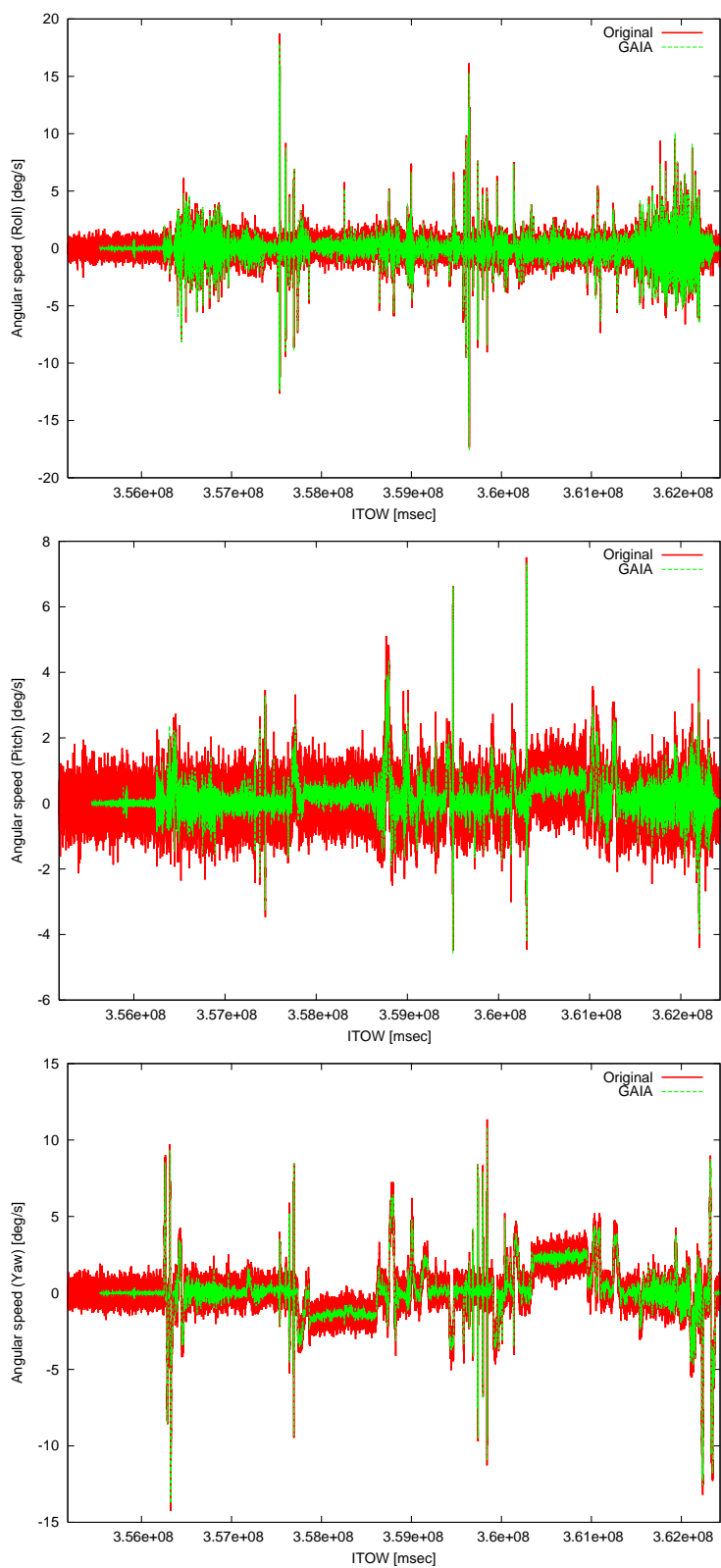


図 5.34: ジャイロ 出力値比較

### 5.5.3 バイアス変動推定を加えた状態での比較

3.6.4 節にならない、バイアス変動を加えた状態でのアルゴリズムを適用した結果を以下に GAIA との比較で示す。図 5.35、図 5.36、図 5.37 はそれぞれ位置、速度、姿勢の履歴である。

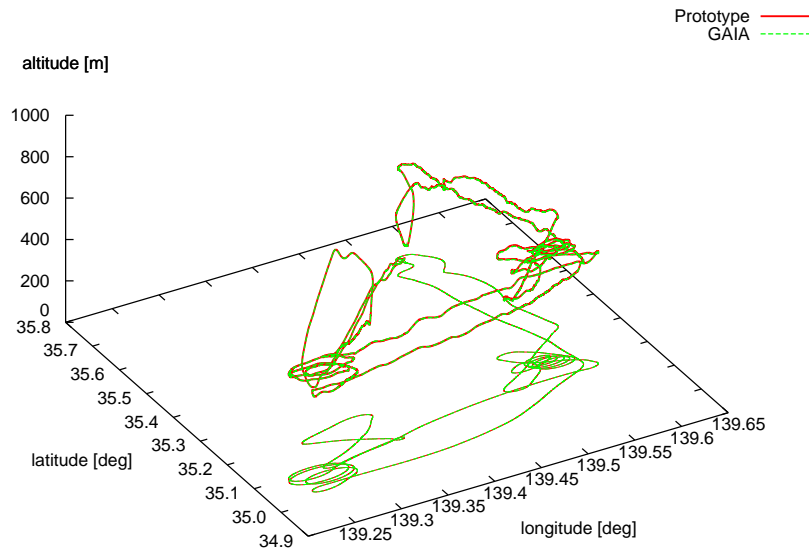


図 5.35: GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 位置履歴

バイアス変動推定を行っても GAIA と近い値が得られていることが大まかに確認できる。より詳細に結果を見ていくため、バイアス変動推定がない場合と同様に統計量ならびに対地速度に対する横滑りの履歴を求めた。表 5.7 が統計量、図 5.38 が横滑り角履歴である。

表 5.7: プロトタイプと GAIA の差異 (バイアス変動推定付き)  
(GPS Time 3.58E+08[msec] 以降)

	平均値	標準偏差	最悪値
水平距離 [m]	5.62	2.24	12.1
高度 [m]	1.73	1.64	5.45
北方向速度 [m/s]	0.00117	0.117	1.43
東方向速度 [m/s]	-0.00319	0.114	-1.26
重力方向速度 [m/s]	-0.121	0.0825	-0.697
ロール [deg]	-0.00235	0.207	-0.909
ピッチ [deg]	0.0972	0.887	2.87
ヘディング [deg]	1.25	5.97	16.3

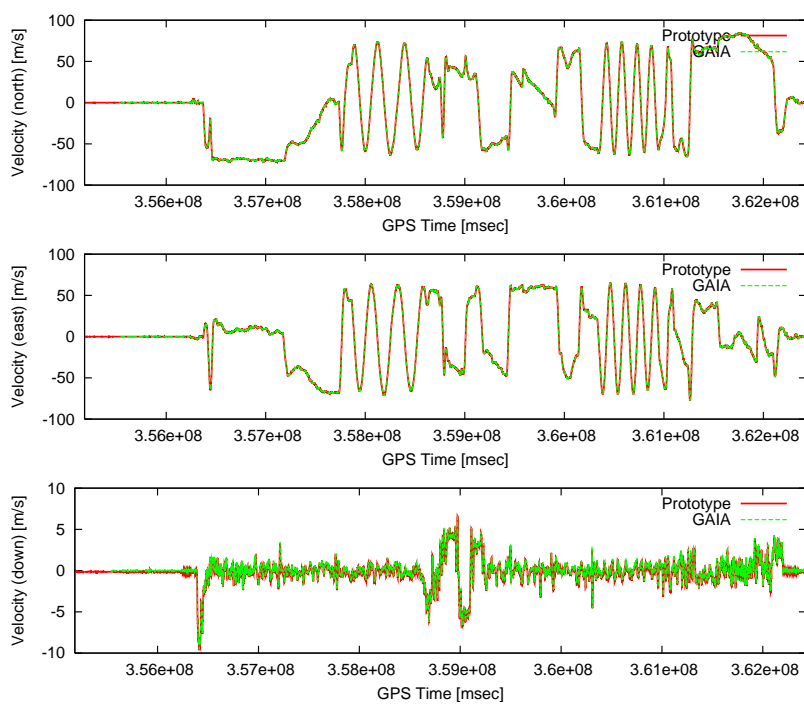


図 5.36: GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 速度履歴

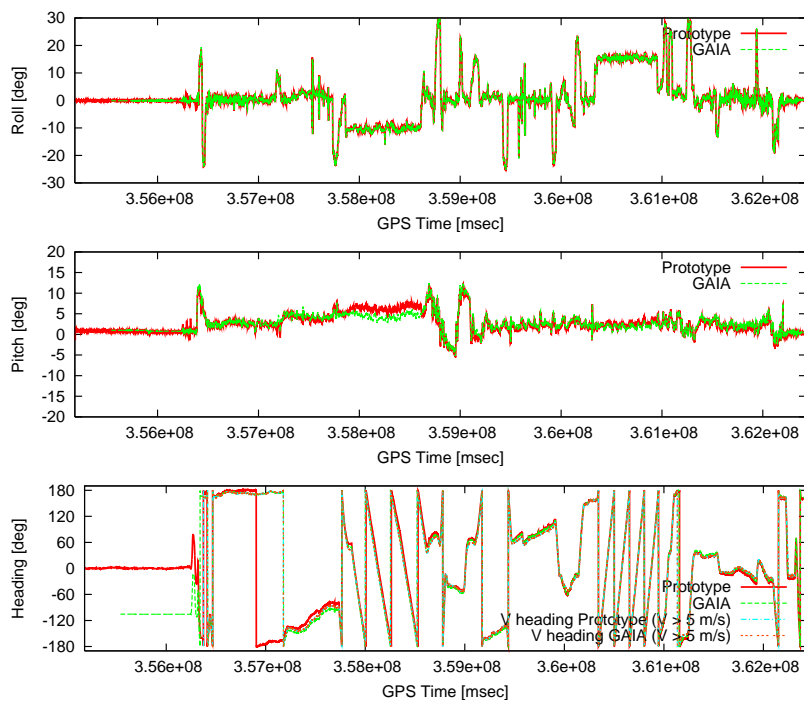


図 5.37: GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 姿勢履歴

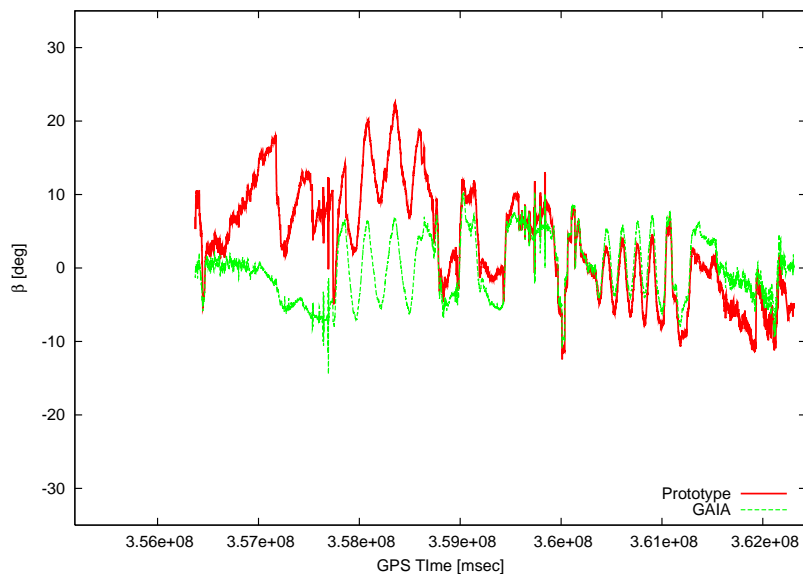


図 5.38: GAIA との比較実験 (バイアス変動推定付き) 対地速度に対する横滑り履歴

以下、バイアス変動推定がない場合との比較で述べると、まず位置の精度は水平距離で多少悪くなったものの、高度で改善が見られている。最悪値では水平距離で 10.6m から 12.1m と若干悪くなったものの、高度は 18.1m から 5.45m へと改善した。これはバイアス変動推定が有効に機能した結果だと考えられる。

速度については変化があまり見られていない。このことは、速度が慣性センサに対する依存よりも GPS 受信機に対する依存が大きいのことを示していると考えられる。

姿勢についてみるとロール、ピッチ、ヨーのどれでも精度が多少改善されていることがわかる。特にヘディングについては最悪値で 6.96deg から 5.97deg と約 1deg 改善している。位置に続き、姿勢でもバイアス推定変動による精度が改善されることが示された。

しかしながら対地速度に対する横滑りの誤差の傾向はいまだにバイアス変動推定がないものと同じである。このことから考えるに今回利用した MEMS 慣性センサ、特にジャイロは、バイアス変動以外のモデル化できていない誤差要因がある、あるいはモデル化されている部分についてもパラメータ自体が時間変化しているなど、不確定な要因が存在しセンサ自体の精度を劣化させていると考えられる。すなわち本実験で示された結果である、位置精度で水平誤差 10m 以内、垂直誤差で 15m 以内、姿勢はロール誤差、ピッチ誤差で 1deg 以内、ヘディング誤差で 10deg 程度といった精度を大きく改善するためには 2 つの手法が考えられるだろう。

1 つはハードウェア的なアプローチである。単純な方法であるがジャイロをより精度の高いものに変更すればより高い精度を実現できる可能性がある。しかしながら本システムはジャイロをできるだけ小型軽量安価な汎用的な製品を使うことによって実現されるものであるから、より精度の高いジャイロが汎用的に使用できるような技術革新の到来が待たれる。あるいはジャイロを補強するようなシステム、例えば序章でも述べたが、地磁気センサや GPS コンパスなどと組み合わせる方法が有効であろう。

もう 1 つはソフトウェア的なアプローチである。精度が悪いジャイロをより詳しく分析し、より詳細な数学モデルを作成することによって精度を改善できる可能性がある。他の先行研究を参照すると、航空宇



宙用ないしはそれに順ずる航法装置の高精度化をニューラルネットワークやウェーブレットフィルタなどを用いて実現している。このような手法は今後検討に値するであろう。

#### 5.5.4 高い精度をもつ GAIA のジャイロで計算を行った場合での比較

前の解析において述べた精度改善のためのハードウェア的アプローチの有効性について確認するため、本研究の主題である低精度センサを用いてという題意には反するが、精度が高い GAIA のジャイロを利用した比較を行うことにした。方法は単純にプロトタイプジャイロ出力を GAIA のジャイロ出力に置き換えて INS/GPS アルゴリズムを適用し、比較を行う。この際に GAIA とプロトタイプの機体への取付け位置や角度の違いが問題となるが、この解析は、精度が高いジャイロに換えた場合の相対的な影響が知りたいという目的のみなので、ここでは両者とも同一の位置に取り付けられていたという少々強引な仮定のもと計算を進めている。

以下に結果を記す。図 5.39、図 5.39、図 5.39 はそれぞれ位置履歴、速度履歴、姿勢履歴である。どれも GAIA と大変よく一致していることが見て取れる。

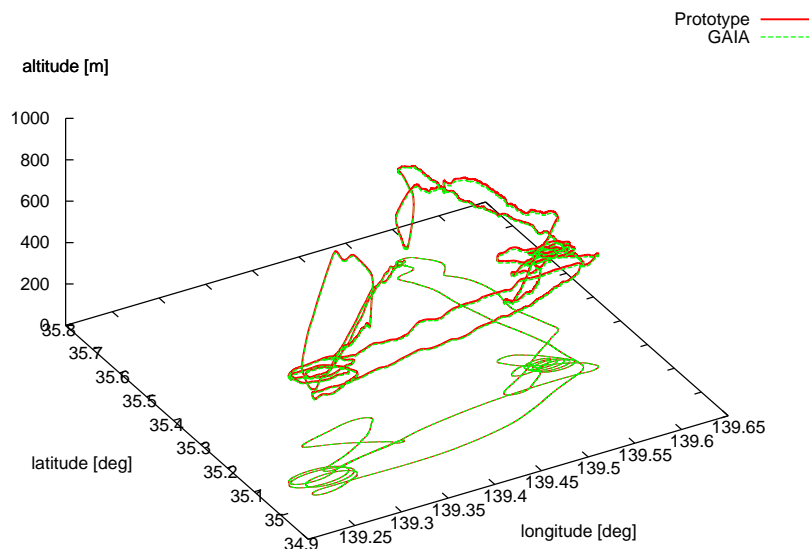


図 5.39: GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 位置履歴

また、これまでと同様に統計的な差異と対地速度に対する横滑り履歴を求めた。表 5.8、ならびに図 5.42 に結果を記す。

注目すべきはヘディングの標準偏差が非常に少なくなっていること、ならびに横滑り履歴が GAIA のそれとほぼ一致していることが見て取れる。このように精度の高いジャイロを利用することで、ヘディングの性能が改善されることが示された。つまりヘディングの性能はジャイロの精度に非常に依存すると結論付けられる。

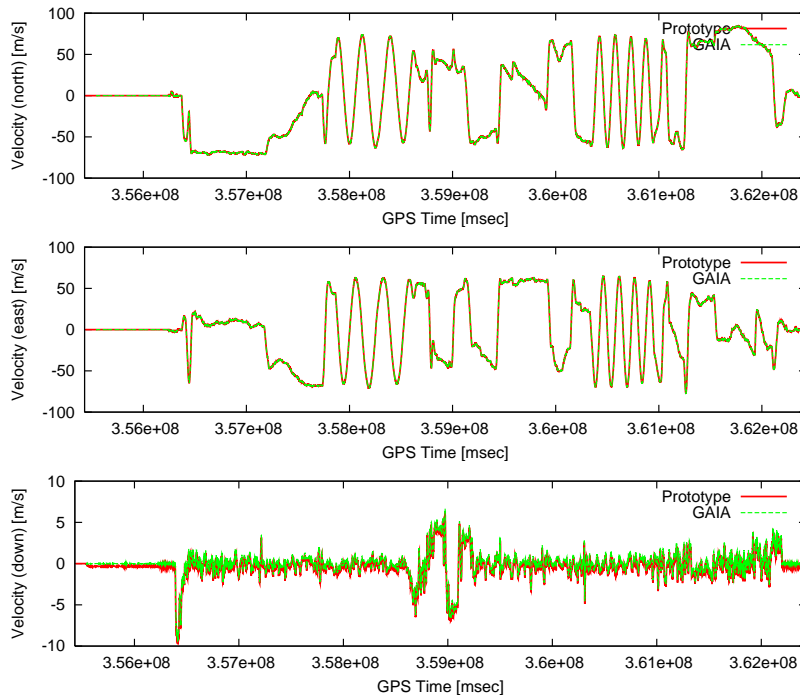


図 5.40: GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 速度履歴

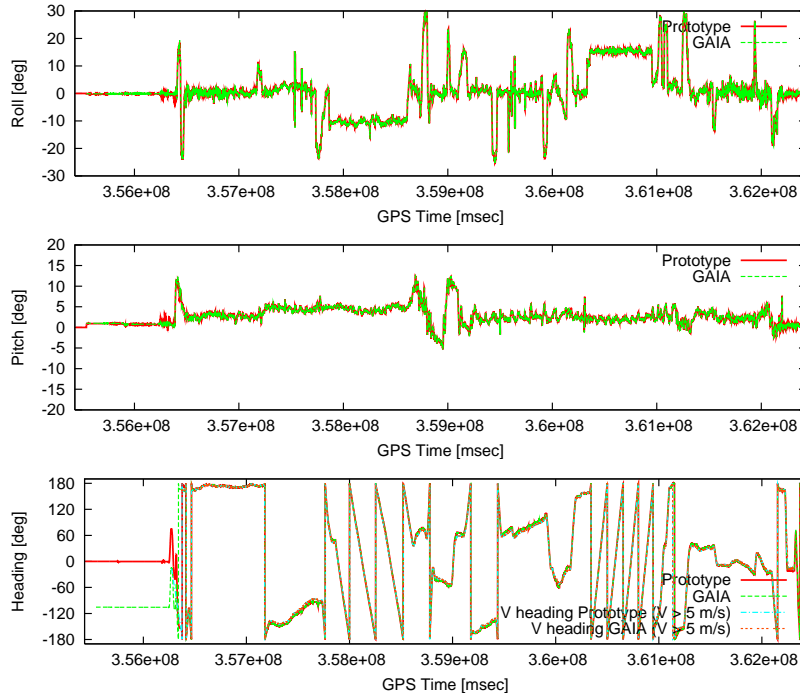


図 5.41: GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 姿勢履歴

表 5.8: プロトタイプと GAIA の差異 (GAIA ジャイロを利用)  
(GPS Time 3.58E+08[msec] 以降)

	平均値	標準偏差	最悪値
水平距離 [m]	5.12	2.08	11.1
高度 [m]	7.86	2.18	11.7
北方向速度 [m/s]	-0.00484	0.097	1.46
東方向速度 [m/s]	-0.00222	0.104	-1.20
重力方向速度 [m/s]	-0.326	0.0399	-0.429
ロール [deg]	-0.0149	0.105	-1.19
ピッチ [deg]	-0.00296	0.0860	-0.565
ヘディング [deg]	-0.203	0.949	-5.0205

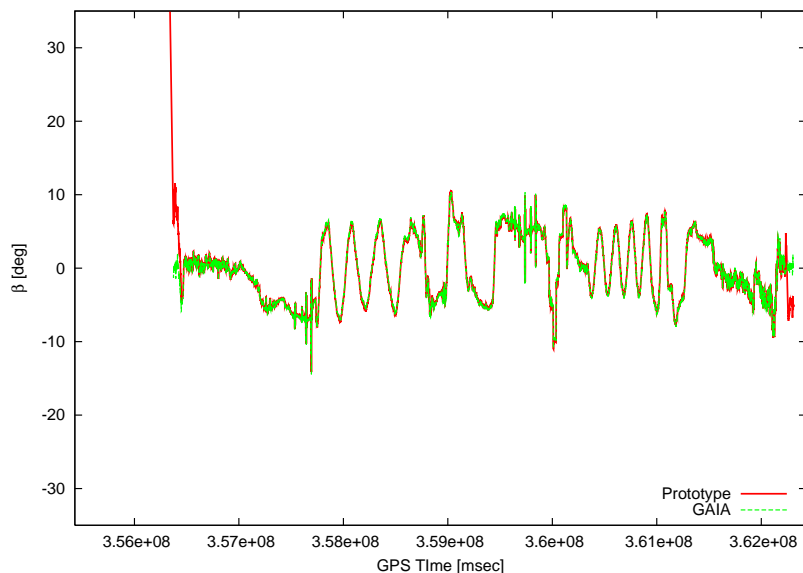


図 5.42: GAIA との比較実験 (GAIA ジャイロを利用) 対地速度に対する横滑り履歴

### 5.5.5 較正作業結果を反映しなかった場合での比較

プロトタイプにおいて較正結果を反映しなかった場合、どのような結果が得られるかを検証した。結果は図 5.43、図 5.43、図 5.43 がそれぞれ位置履歴、速度履歴、姿勢履歴である。

これまでと同様、統計的な比較を表 5.9 に、対地速度に対する横滑り角を図 5.46 に示す。

これらから明らかなように、明らかに較正結果を適用した場合と比較して精度が劣化しているのがわかる。特にヘディングで精度の悪化は著しく、標準偏差でみると較正ありで 7deg であったのが 20deg にもなっている。このことから較正作業は有効である、というよりかむしろ必要な作業であると結論づけられる。

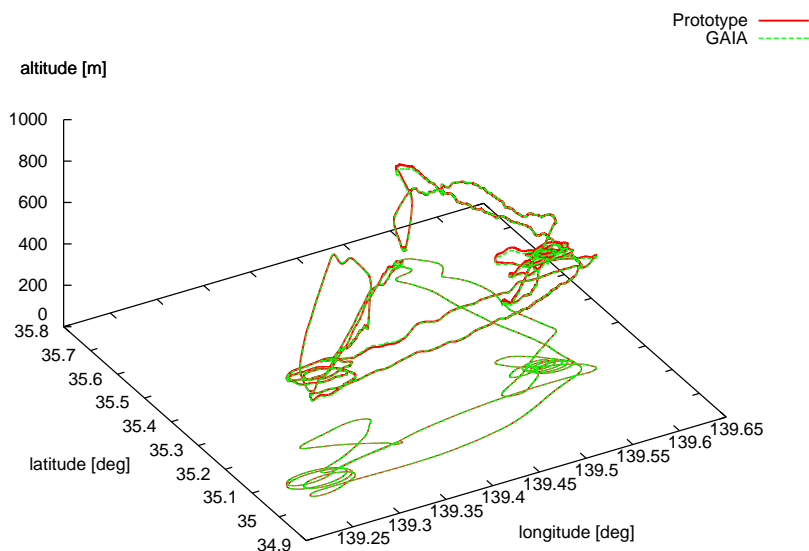


図 5.43: GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 位置履歴

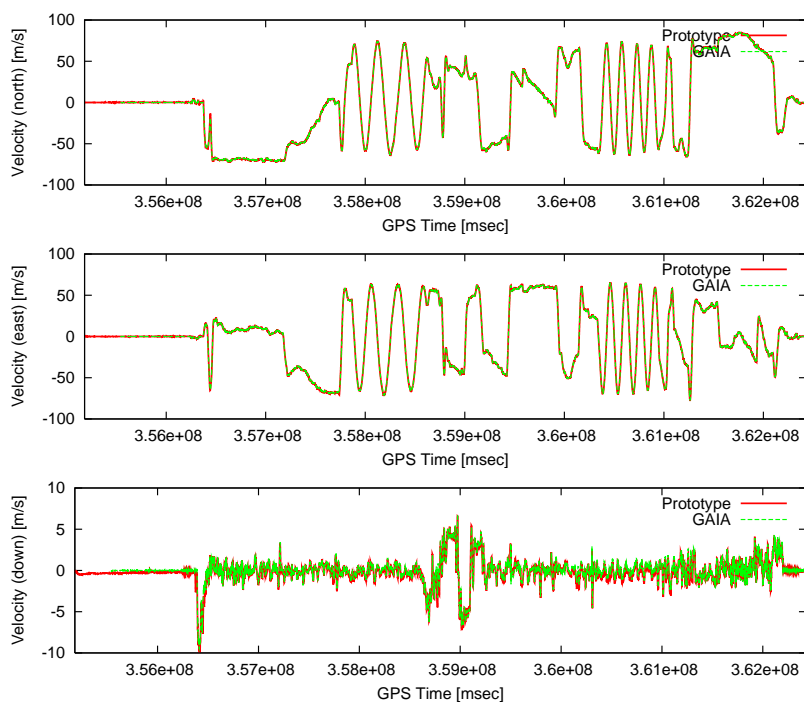


図 5.44: GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 速度履歴

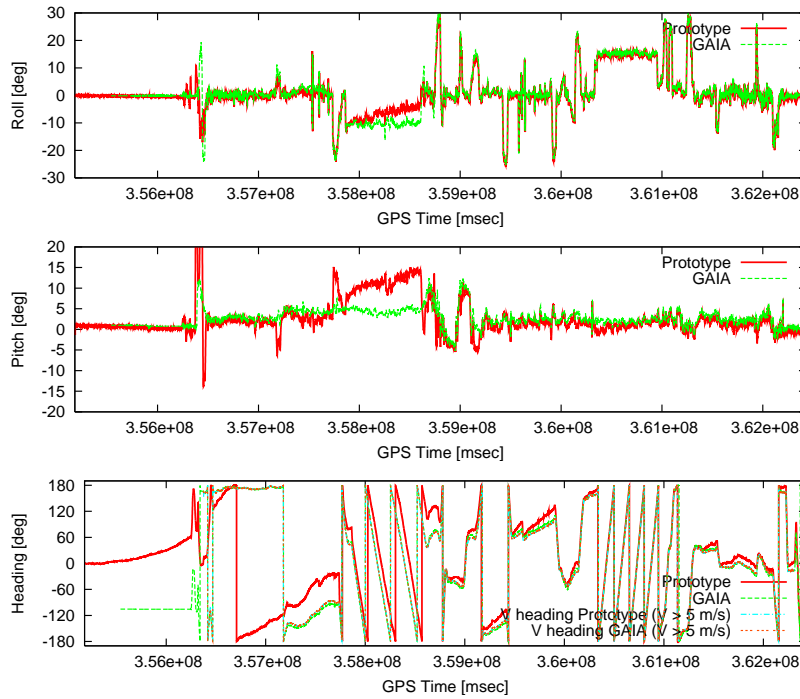


図 5.45: GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 姿勢履歴

表 5.9: プロトタイプと GAIA の差異 (較正結果適用なし)  
(GPS Time 3.58E+08[msec] 以降)

	平均値	標準偏差	最悪値
水平距離 [m]	8.68	3.12	17.1
高度 [m]	3.03	4.66	15.0
北方向速度 [m/s]	0.0435	0.312	1.34
東方向速度 [m/s]	0.0126	0.277	1.81
重力方向速度 [m/s]	-0.142	0.209	-1.36
ロール [deg]	0.106	1.83	6.86
ピッチ [deg]	0.0777	3.17	10.1
ヘディング [deg]	18.1	20.88	77.8

## 5.6 まとめ

プロトタイプを実際に作成し、較正作業の後、比較実験を 3 回行った。以下、この過程で得られた結果ならびに考察を示す。

- MEMS 慣性センサと民生用 GPS 受信機を利用したプロトタイプによって、本研究で提案したシステムは汎用的な使用を行うのに十分に小型軽量安価であることが示された。

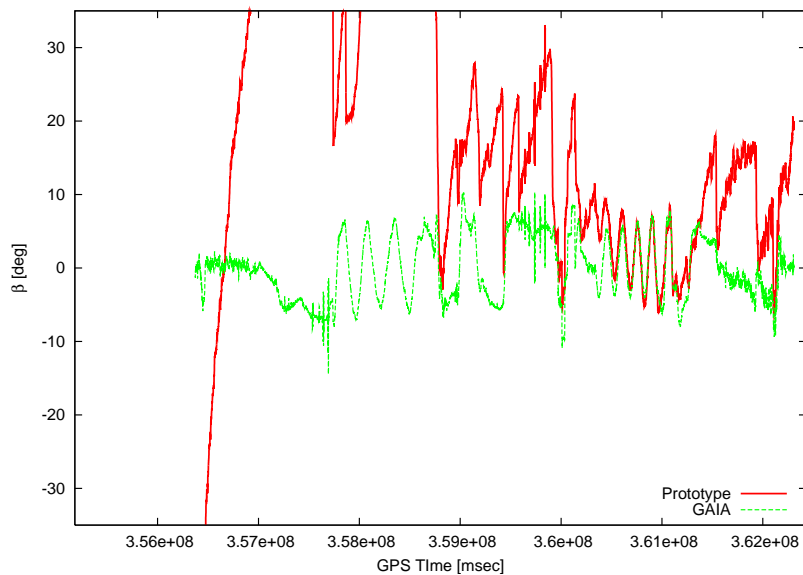


図 5.46: GAIA との比較実験 (較正結果適用なし) 対地速度に対する横滑り履歴

- プロトタイプで得られた結果によると、本研究で提案したシステムの精度は水平誤差 10m 以内、垂直誤差で 20m 以内、姿勢はロール誤差、ピッチ誤差で 2deg 以内、ヘディング誤差で 10deg 程度であった。
- バイアス変動を推定することは有効であり、その場合の精度は多少改善し、垂直誤差で 15m 以内、姿勢はロール誤差、ピッチ誤差で 1deg 以内となる。
- 比較実験によると、この精度は市販の INS/GPS 装置である Crossbow 社製 NAV420 と同程度の性能である。
- 姿勢についてはロール、ピッチが比較的精度を得やすいのに対し、ヘディングは精度を出すのが困難である。これは通常の加速環境における加速度よりもはるかに大きい重力をリファレンスとしてロールやピッチに対しては補正がかかる一方、ヘディングにはそのような強力なリファレンスが存在しないためである。そのため、ヘディングの精度には慣性センサ、特にジャイロの精度が大きく寄与している。
- MEMS 慣性センサには温度ドリフトがあることが示された。また温度ドリフトならびに取付け誤差を補正することによって精度を大きく改善できることが示された。

## 第 6 章

### 結言

以上『低精度 MEMS センサと汎用 GPS 受信機の融合による高精度航法システムの研究』と題して、低精度 MEMS センサと汎用 GPS 受信機の融合による INS/GPS 複合航法システムを検討してきたが、数値シミュレーション、加えて実機試験から、本研究が提案したシステムは十分に汎用的な使用に耐えうる精度を有し、また小型軽量安価であることが示された。

これを受けて現在、より小型軽量な次期プロトタイプ (図 6.1) を開発中である。これは現在小型 UAV に搭載することを考えており、本システムで提案したシステムが提供する高精度な航法情報によってより賢く飛行することを目指すものである。大きさは  $51 \times 51 \times 48\text{mm}$  で重さは 84.0g、今回のプロトタイプでは省かれていたリアルタイムでの航法情報の提供がこれのみで可能である。完成は 2007 年内を目標としている。

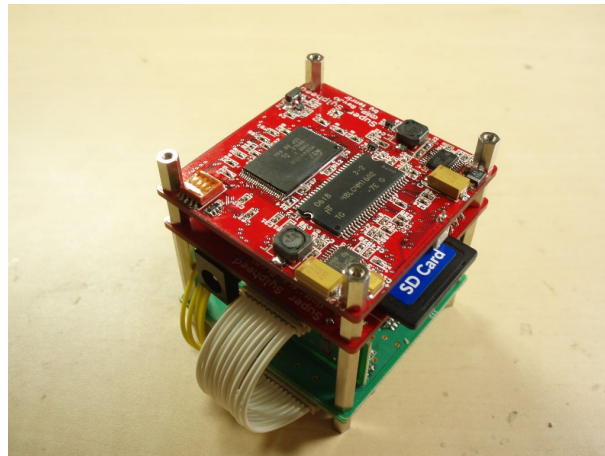


図 6.1: 新プロトタイプ

最後に感想を述べておくと、航法システムは社会にとってなくてはならない根幹的な技術の一つである。そのため、このような高精度な航法システムが小型、軽量かつ安価に実現できれば、様々な応用が行われることであろう。今後も航法の分野への研究に力を尽くしていきたいと考えている。

## 付録 A

# Quaternion Algebra

本研究では、3次元空間における座標変換を行う必要がある。座標変換を行う方法としては、代表的なものとして

1. Euler 角を使用する方法
2. Direction Cosine Matrix(DCM) を使用する方法
3. Quaternion を使用する方法

があげられる。これらは以下の特徴をもつ。

表 A.1: 座標変換の方法

方法	1. Euler 角	2. DCM	3. Quaternion
変数の個数	3	9	4
長所	変数の数が最小	特異点は存在しない、行列計算であるため理解しやすい	特異点は存在しない、変数の数は4つと少ない
短所	特異点が存在するため、演算が成り立つか常に確かめる必要がある	変数の個数が多いため計算負荷が大きい	理解しにくい

変数の数が少ないほど、経験的に数値演算誤差が少ないとされている。また演算が成り立つかどうかを調べることは、計算回数が増すにつれ計算負荷が大きくなることを意味する。本研究では、第2章で述べられるような Kalman Filter を導入するが、これにはかなりの計算負荷が予想される。一方、数値演算の精度向上もしたい。従って本研究では、数値誤差および演算負荷の軽減という観点から Quaternion による方法を採用することにした。

本章では、Quaternion による演算について言及することにする。なお、数学的な厳密さを求めたものではなく、本研究で用いる計算方法の説明として考えて頂きたい。



以下、Quaternion の表記として、 $\tilde{q}$  または  $\begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$  のようなを用いることにする。また 3次元ベクトル

の表記として  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  のようなを用いることにする。加えて、 $\begin{Bmatrix} q_0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix}$  や  $\begin{Bmatrix} q_0 \\ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$  のような表記は、Quaternion ではあるが  $\vec{p}$  および  $p_1, p_2, p_3$  を 3次元ベクトルとみなした表記である。

## A.1 Quaternion の定義

Quaternion は互いに 1 次独立である基底  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  を用いて

$$\tilde{q} \equiv \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{1} * q_0 + \mathbf{i} * q_1 + \mathbf{j} * q_2 + \mathbf{k} * q_3 \quad (\text{A.1.1})$$

と定義される。基底  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  には以下の関係が存在する。

$$\mathbf{1} * \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (\text{A.1.2})$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{i} = \mathbf{j} * \mathbf{j} = \mathbf{k} * \mathbf{k} = -\mathbf{1} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{j} = -(\mathbf{j} * \mathbf{i}) = \mathbf{k} \quad (\text{A.1.4})$$

$$\mathbf{j} * \mathbf{k} = -(\mathbf{k} * \mathbf{j}) = \mathbf{i} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\mathbf{k} * \mathbf{i} = -(\mathbf{i} * \mathbf{k}) = \mathbf{j} \quad (\text{A.1.6})$$

## A.2 共役 Quaternion の定義

共役 Quaternion  $\tilde{q}^*$  とは

$$\tilde{q}^* \equiv \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.1})$$

### A.3 Quaternion のスカラー積

Quaternion はスカラーとの演算が定義される。Quaternion  $\tilde{q} \equiv \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$  とし、スカラーを  $a$  とすれば

$$\tilde{q} * a \equiv a * \tilde{q} \equiv \begin{pmatrix} q_0 * a \\ q_1 * a \\ q_2 * a \\ q_3 * a \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.1})$$

### A.4 Quaternion 間の加算

Quaternion は Quaternion 間の加算が定義される。

$$\tilde{q}_a \equiv \begin{pmatrix} q_{a0} \\ q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_b \equiv \begin{pmatrix} q_{b0} \\ q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.1})$$

であるとき、

$$\begin{aligned} \tilde{q}_a + \tilde{q}_b &= (\mathbf{1} * q_{a0} + \mathbf{i} * q_{a1} + \mathbf{j} * q_{a2} + \mathbf{k} * q_{a3}) + (\mathbf{1} * q_{b0} + \mathbf{i} * q_{b1} + \mathbf{j} * q_{b2} + \mathbf{k} * q_{b3}) \\ &= \mathbf{1} * (q_{a0} + q_{b0}) + \mathbf{i} * (q_{a1} + q_{b1}) + \mathbf{j} * (q_{a2} + q_{b2}) + \mathbf{k} * (q_{a3} + q_{b3}) \\ &\equiv \begin{pmatrix} q_{a0} + q_{b0} \\ q_{a1} + q_{b1} \\ q_{a2} + q_{b2} \\ q_{a3} + q_{b3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

この演算は可換である。すなわち、

$$\tilde{q}_b + \tilde{q}_a = \tilde{q}_a + \tilde{q}_b \quad (\text{A.4.3})$$

### A.5 Quaternion 間の乗算

Quaternion は Quaternion 間の乗算が定義される。

$$\tilde{q}_a \equiv \begin{pmatrix} q_{a0} \\ q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_b \equiv \begin{pmatrix} q_{b0} \\ q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5.1})$$

であるとき、

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_a \tilde{q}_b &= (1 * q_{a0} + i * q_{a1} + j * q_{a2} + k * q_{a3}) (1 * q_{b0} + i * q_{b1} + j * q_{b2} + k * q_{b3}) \\
&= 1 * (q_{a0} * q_{b0} - q_{a1} * q_{b1} - q_{a2} * q_{b2} - q_{a3} * q_{b3}) \\
&\quad + i * (q_{a0} * q_{b1} + q_{a1} * q_{b0} + q_{a2} * q_{b3} - q_{a3} * q_{b2}) \\
&\quad + j * (q_{a0} * q_{b2} - q_{a1} * q_{b2} + q_{a2} * q_{b0} + q_{a3} * q_{b1}) \\
&\quad + k * (q_{a0} * q_{b3} + q_{a1} * q_{b2} - q_{a2} * q_{b1} + q_{a3} * q_{b0}) \\
&\equiv \left\{ \begin{array}{l} q_{a0} * q_{b0} - q_{a1} * q_{b1} - q_{a2} * q_{b2} - q_{a3} * q_{b3} \\ q_{a0} * q_{b1} + q_{a1} * q_{b0} + q_{a2} * q_{b3} - q_{a3} * q_{b2} \\ q_{a0} * q_{b2} - q_{a1} * q_{b2} + q_{a2} * q_{b0} + q_{a3} * q_{b1} \\ q_{a0} * q_{b3} + q_{a1} * q_{b2} - q_{a2} * q_{b1} + q_{a3} * q_{b0} \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{A.5.2}$$

この結果から、3次元ベクトルの内積、および外積の定義を用いて Quaternion 間の乗算を定義することができる。ただし、内積は  $\cdot$ 、外積は  $\times$  であらわすものとする。

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_a \tilde{q}_b &= \left\{ \begin{array}{l} q_{a0} \\ q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q_{b0} \\ q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{array} \right\} \\
&\equiv \left\{ \begin{array}{l} q_{a0} * q_{b0} - \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \\ q_{a0} \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} + q_{b0} \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{A.5.3}$$

この演算は可換ではない。すなわち、

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_b \tilde{q}_a &= \left\{ \begin{array}{l} q_{b0} * q_{a0} - \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} \\ q_{b0} \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} + q_{a0} \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} q_{a0} * q_{b0} - \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \\ q_{a0} \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} + q_{b0} \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \\
&\neq \tilde{q}_a \tilde{q}_b
\end{aligned} \tag{A.5.4}$$

## A.6 Quaternion による 3次元ベクトルの回転

本項では、ベクトルによる演算と Quaternion による演算の結果が一致することを示し、Quaternion の演算により 3次元ベクトルの回転を行うことが可能であることを示す。

3次元ベクトル  $\vec{p}$  を3次元単位ベクトル  $\vec{r}$  (ただし  $\vec{r} \cdot \vec{r} = 1$ ) を軸として、 $\theta$  だけ回転した3次元ベクトル  $\vec{p}'$  はベクトルの演算より次のように求めることができる。

$$\vec{p}' = \cos \theta * \vec{p}_\perp + \sin \theta * \vec{q} + \vec{p}_\parallel \quad (\text{A.6.1})$$

ただし、 $\vec{p}_\perp$ 、 $\vec{p}_\parallel$  はそれぞれ  $\vec{p}$  の  $\vec{r}$  に対する垂直成分、水平成分とする。すなわち、

$$\vec{p}_\perp \equiv \vec{p} - \vec{p}_\parallel, \quad \vec{p}_\parallel \equiv (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} \quad (\text{A.6.2})$$

また、 $\vec{q}$  は  $\vec{p}_\perp$  を  $\vec{r}$  を軸に90度回転したものとす。すなわち、

$$\vec{q} \equiv \vec{p}_\perp \times \vec{r} \quad (\text{A.6.3})$$

従って  $\vec{p}'$  を  $\vec{p}$  と  $\vec{r}$  を用いてあらわすと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \cos \theta * \vec{p}_\perp + \sin \theta * \vec{q} + \vec{p}_\parallel \\ &= \cos \theta * \vec{p}_\perp + \sin \theta * (\vec{p}_\perp \times \vec{r}) + \vec{p}_\parallel \\ &= \cos \theta (\vec{p} - \vec{p}_\parallel) + \sin \theta ((\vec{p} - \vec{p}_\parallel) \times \vec{r}) + \vec{p}_\parallel \\ &= \cos \theta * \vec{p} + (1 - \cos \theta) (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{p} + \sin \theta (\vec{p} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.6.4})$$

ここで  $\tilde{p} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix}$  と  $\tilde{q} \equiv \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} * \vec{r} \end{Bmatrix}$  による次の演算を考えてみる。

$$\begin{aligned} \tilde{q}^* \tilde{p} \tilde{q} &\equiv \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} * \vec{r} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} * \vec{r} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \\ \cos \frac{\theta}{2} * \vec{p} - \sin \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} * \vec{r} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\vec{r} \cdot \vec{p}) - (\cos \frac{\theta}{2} * \vec{p} - \sin \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p})) \cdot (\sin \frac{\theta}{2} * \vec{r}) \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} + \cos \frac{\theta}{2} (\cos \frac{\theta}{2} * \vec{p} - \sin \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p})) - (\cos \frac{\theta}{2} * \vec{p} + \sin \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p})) \times (\sin \frac{\theta}{2} * \vec{r}) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} + \cos^2 \frac{\theta}{2} * \vec{p} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p}) - \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p} \times \vec{r}) \end{Bmatrix} \\ &\quad (\because (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} = \vec{0}) \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} + \cos^2 \frac{\theta}{2} * \vec{p} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p}) - \sin^2 \frac{\theta}{2} ((\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{p} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r}) \end{Bmatrix} \\ &\quad (\because \vec{r} \times \vec{p} \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{p} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r}) \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \vec{p} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\vec{r} \times \vec{p}) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \theta * \vec{p} + (1 - \cos \theta) * (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} + \sin \theta * (\vec{p} \times \vec{r}) \end{Bmatrix} \\ &\equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p}' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6.5})$$

以上の計算結果から、Quaternion  $\tilde{p}$  および  $\tilde{q}$  を用いて演算を行うことにより、 $\vec{p}$  を回転した  $\vec{p}'$  を求めることが可能であることが示された。従って、3次元ベクトルの回転は Quaternion の演算により求めることが可能である。

以後、

$$\tilde{q} \equiv \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} * \vec{r} \end{cases} \quad (\text{ただし、} \vec{r} \cdot \vec{r} = 1) \quad (\text{A.6.6})$$

のような形の Quaternion  $\tilde{q}$  を回転 Quaternion と呼ぶことにする。

回転 Quaternion の性質として、回転 Quaternion  $\tilde{q}$  に対してその共役 Quaternion  $\tilde{q}^*$  は

$$\begin{aligned} \tilde{q}^* &\equiv \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} * \vec{r} \end{cases}^* \\ &= \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} * \vec{r} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos \frac{-\theta}{2} \\ \sin \frac{-\theta}{2} * \vec{r} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.6.7})$$

すなわち共役を考えることにより、逆回転を表現することができることが示された。

## A.7 Quaternion による回転の合成

前項 A.6 では、Quaternion により 3 次元ベクトルの回転が可能であることを示したが、Quaternion を用いることにより回転の合成を行うことも可能である。

例えば、回転 Quaternion  $\tilde{q}_1$  と  $\tilde{q}_2$  が存在したとする。そのとき、 $\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix}$  を  $\tilde{q}_1$  で回転したあと、 $\tilde{q}_2$  で回転した  $\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p}' \end{Bmatrix}$  は、

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p}' \end{Bmatrix} &= \tilde{q}_2^* \left( \tilde{q}_1^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix} \tilde{q}_1 \right) \tilde{q}_2 \\ &= (\tilde{q}_1^* \tilde{q}_2^*) \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix} (\tilde{q}_1 \tilde{q}_2) \\ &= (\tilde{q}_1 \tilde{q}_2)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix} (\tilde{q}_1 \tilde{q}_2) \\ &\equiv \tilde{q}_{12}^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix} \tilde{q}_{12} \quad (\tilde{q}_{12} \equiv \tilde{q}_1 \tilde{q}_2) \end{aligned} \quad (\text{A.7.1})$$

で求めることが可能である。すなわち、 $\tilde{q}_{12} \equiv \tilde{q}_1 \tilde{q}_2$  なる回転 Quaternion を考えればよい。

## A.8 Quaternion の時間微分

Quaternion  $\tilde{q}$  の時間微分は次の演算により求められることが知られている。

$$\frac{d}{dt} \tilde{q} \equiv \dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \tilde{q} \quad (\text{A.8.1})$$

ここで  $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$  は 3 軸まわりの回転角速度を意味する。

## A.9 回転 Quaternion と Direction Cosine Matrix の関係

A.6 で回転 Quaternion により 3 次元ベクトルの回転が行えることを示したが、本章の冒頭にて Direction Cosine Matrix(DCM) によっても 3 次元ベクトルの回転が行えることを述べた。実際、両者には以下の関係が存在する。

回転 Quaternion を  $\tilde{q} \equiv \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$  とすれば、対応する DCM  $C$  は、

$$C = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9.1})$$

であり、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p}' \end{Bmatrix} = \tilde{q}^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{Bmatrix} \tilde{q} \quad (\text{A.9.2})$$

ならば、

$$\vec{p}' = C\vec{p} \quad (\text{A.9.3})$$

である。

## 付録 B

# Coordinate Systems

本研究で取り扱う座標系は次の 5 つの座標系である。

1. Earth-Centered Inertial Frame (以下、*i-Frame* とも表記)
2. Earth-Centered, Earth-Fixed Frame (同、*e-Frame*)
3. Body Frame (同、*b-Frame*)
4. Local Geodetic Frame (同、*g-Frame*)
5. Navigation Frame (Wander Azimuth Frame) (同、*n-Frame*)

すべて右手系の直交座標系を採用することにし、図 B.1 のように (*X* 軸-*Y* 軸-*Z* 軸) を定める。表記については、例えば  $X^i$  軸と書いた場合、*i-Frame* における *X* 軸を表すとする。

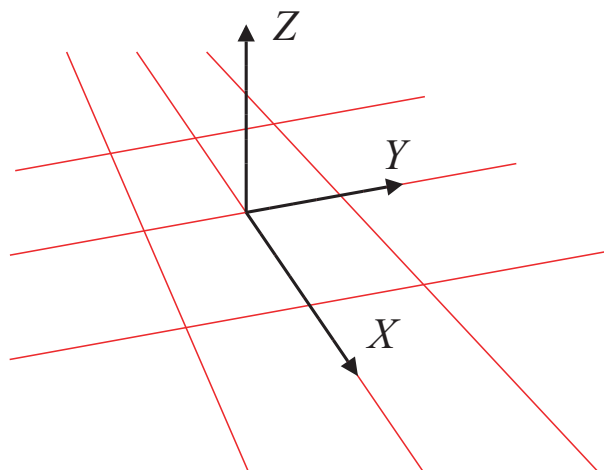


図 B.1: 右手座標系

以下、これらの座標系について説明を行う。また各座標系間の変換についても言及する。

## B.1 Earth-Centered Inertial Frame (*i-Frame*)

Newton の法則が成り立つ慣性座標系のうち、地球中心を原点とし、地球の自転軸と平行になるよう  $Z^i$  軸を定めた右手系直交座標系を Earth-Centered Inertial Frame(*i-Frame*) とする。

## B.2 Earth-Centered, Earth-Fixed Frame (*e-Frame*)

地球中心を原点とし、 $X^e$  軸を緯度  $0^\circ$ 、経度  $0^\circ$  方向とし、かつ地球の自転軸と平行になるように  $Z^e$  軸を定めた地球固定の右手系直交座標系を Earth-Centered, Earth-Fixed Frame(*e-Frame*) とする。

## B.3 Local Geodetic Frame (*g-Frame*)

機体を原点とし、北方向を  $X^g$  軸とし、地球による重力方向を  $Z^g$  軸とした右手系直交座標系を Local Geodetic Frame(*g-Frame*) とする。すなわち  $Y^g$  軸は東方向を向く。

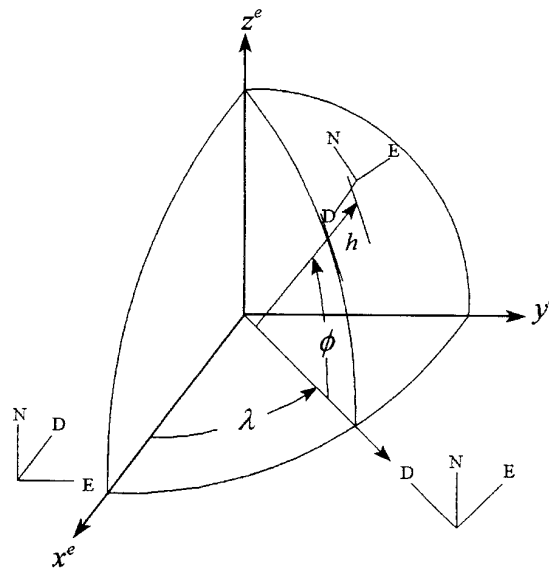


図 B.2: *e-Frame* と *g-Frame*

この座標系の特徴を示すために、( $X^g$  軸- $Y^g$  軸- $Z^g$  軸) を (*North-East-Down*) の頭文字をとって ( $N$  軸- $E$  軸- $D$  軸) とも表記することにする。 $N$  軸と  $E$  軸がつくる平面は地表面に対して平行である。

## B.4 Navigation Frame (Wander Azimuth Frame) (*n-Frame*)

機体を原点とし、地球による重力方向を  $Z^n$  軸とした右手系直交座標系を Navigation Frame(*g-Frame*) とする。 $g-Frame$  を  $Z^g$  軸、すなわち  $D$  軸を中心に  $\alpha$  rad だけ回転したとき、この座標系、すなわち *n-Frame*



に一致するものとする。この角度を Azimuth 角と呼び、次式によって定義される。

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sin \phi \quad (\text{B.4.1})$$

ただし  $\dot{\lambda}$ 、 $\phi$  はそれぞれ経度の時間変化、緯度をあらわすものとする。

なおこのような座標系を導入したのは極地方において特異点を発生することなく演算を行うためである。

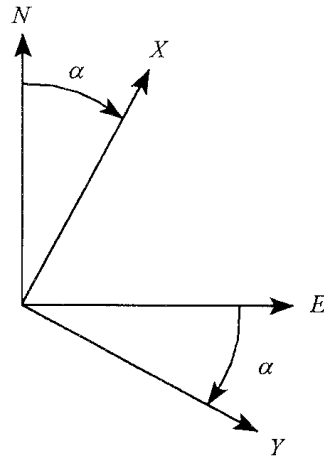


図 B.3: *g-Frame* と *n-Frame*

## B.5 Body Frame (*b-Frame*)

機体を原点とし、機体の進行方向を  $X^b$  軸、機体の揚力方向を  $Z^b$  軸とした右手系直交座標系を **Body Frame**(*b-Frame*) とする。*b-Frame* において、 $X^b$  軸まわりの回転をロール、 $Y^b$  軸まわりの回転をピッチ、 $Z^b$  軸まわりの回転をヨーという。なお、本研究で開発したシステムでは、この座標系に対して慣性センサを固定する方式をとっている。

## B.6 座標変換の表記

各座標系間の変換は付録 A で言及した Quaternion によって行う。それにあたって表 B.1 の表記を導入する。

式 (A.6.7) より共役 Quaternion は逆回転を表現する。従って、例えば

$$\tilde{q}_i^e = \tilde{q}_e^i^* \quad (\text{B.6.1})$$

の関係がある。また、式 (A.7.1) より、例えば

$$\tilde{q}_i^b = \tilde{q}_i^e \tilde{q}_e^b = \tilde{q}_i^e \tilde{q}_e^n \tilde{q}_n^b \quad (\text{B.6.2})$$

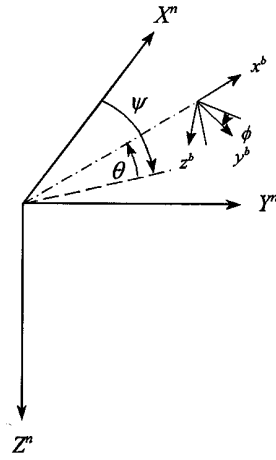


図 B.4: *n-Frame* と *b-Frame*

表 B.1: 座標変換の表記

変換先 変換元	<i>i-Frame</i>	<i>e-Frame</i>	<i>g-Frame</i>	<i>n-Frame</i>	<i>b-Frame</i>
<i>i-Frame</i>		$\tilde{q}_i^e$	$\tilde{q}_i^g$	$\tilde{q}_i^n$	$\tilde{q}_i^b$
<i>e-Frame</i>	$\tilde{q}_e^i$		$\tilde{q}_e^g$	$\tilde{q}_e^n$	$\tilde{q}_e^b$
<i>g-Frame</i>	$\tilde{q}_g^i$	$\tilde{q}_g^e$		$\tilde{q}_g^n$	$\tilde{q}_g^b$
<i>n-Frame</i>	$\tilde{q}_n^i$	$\tilde{q}_n^e$	$\tilde{q}_n^g$		$\tilde{q}_n^b$
<i>b-Frame</i>	$\tilde{q}_b^i$	$\tilde{q}_b^e$	$\tilde{q}_b^g$	$\tilde{q}_b^n$	

## B.7 *i-Frame* と *e-Frame* の関係

*i-Frame* と *e-Frame* は原点が一致し、*e-Frame* は *i-Frame* に対して  $Z^i$  軸に対して、自転周期 (Earth Rate、 $\Omega_{e/i}$  と表記) で回転している。すなわち、式 (A.8.1) から

$$\dot{\tilde{q}}_i^e = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_{i/e} \end{pmatrix} \right\} \tilde{q}_i^n \tag{B.7.1}$$

*i-Frame* と *e-Frame* は  $Z^i$  軸と  $Z^e$  軸が一致するから、以下の関係も成立する。

$$\vec{\omega}_{i/e}^e = \vec{\omega}_{i/e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{i/e} \end{pmatrix} \tag{B.7.2}$$

## B.8 *e-Frame* と *g-Frame* の関係

*e-Frame* と *g-Frame* は、*e-Frame* を以下の手順で操作することによって、その軸が *g-Frame* の軸と平行になる。(図 B.2 参照)

1. *n-Frame* の原点位置を東経  $\lambda$  rad とすれば、 $\lambda$  rad だけ  $Z^e$  軸に沿って ( $X^e$  軸- $Y^e$  軸- $Z^e$  軸) を回転する。回転した結果 ( $X^e$  軸- $Y^e$  軸- $Z^e$  軸) は ( $X^{e'}$  軸- $Y^{e'}$  軸- $Z^{e'}$  軸) になったとする。
2. *g-Frame* の原点位置を北緯  $\phi$  rad とすれば、 $-\phi$  rad だけ  $Y^{e'}$  軸に沿って ( $X^{e'}$  軸- $Y^{e'}$  軸- $Z^{e'}$  軸) を回転する。回転の結果 ( $X^{e'}$  軸- $Y^{e'}$  軸- $Z^{e'}$  軸) は ( $X^{e''}$  軸- $Y^{e''}$  軸- $Z^{e''}$  軸) になったとする。
3.  $Y^{e''}$  軸に対して  $X^{e''}$  軸、 $Z^{e''}$  軸を  $-90^\circ$  回転する。結果、回転された ( $X^{e''}$  軸- $Y^{e''}$  軸- $Z^{e''}$  軸) は ( $N$  軸- $E$  軸- $D$  軸) に一致する。

この手順を、Quaternion を用いて数式的に説明する。なお、例えば  $(\tilde{q}_e^g)_1$  は操作 1 における回転 Quaternion とする。

$$(\tilde{q}_e^g)_1 = \begin{Bmatrix} \cos \frac{\lambda}{2} \\ \sin \frac{\lambda}{2} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{\lambda}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\lambda}{2} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8.1})$$

$$(\tilde{q}_e^g)_2 = \begin{Bmatrix} \cos \frac{-\phi}{2} \\ \sin \frac{-\phi}{2} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{-\phi}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{-\phi}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8.2})$$

$$(\tilde{q}_e^g)_3 = \begin{Bmatrix} \cos \frac{-90^\circ}{2} \\ \sin \frac{-90^\circ}{2} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8.3})$$

式 (A.7.1) より、全ての操作を合成した回転 Quaternion  $\tilde{q}_e^g$  は

$$\begin{aligned} \tilde{q}_e^g &= ((\tilde{q}_e^g)_1 (\tilde{q}_e^g)_2 (\tilde{q}_e^g)_3) \\ &= \begin{Bmatrix} \cos \frac{\lambda}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\lambda}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{-\phi}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{-\phi}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} - \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ -\cos \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} - \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.8.4})$$

となる。

## B.9 $g$ -Frame と $n$ -Frame の関係

$g$ -Frame を  $D$  軸を軸に  $\alpha$  rad だけ回転したものが  $n$ -Frame に一致することから、 $g$ -Frame と  $n$ -Frame の関係は次のとおりである。(図 B.3 参照)

$$\tilde{q}_g^n = \begin{Bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9.1})$$

## B.10 $e$ -Frame と $n$ -Frame の関係

$e$ -Frame と  $n$ -Frame の関係は

$$\begin{aligned} \tilde{q}_e^n &= \tilde{q}_e^g \tilde{q}_g^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} - \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ -\cos \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} - \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\lambda+\alpha}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda-\alpha}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} - \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ -\cos \frac{\lambda-\alpha}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} - \sin \frac{-\phi}{2} \right) \\ \sin \frac{\lambda+\alpha}{2} \left( \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.10.1})$$

である。これより

$$\phi = \arcsin \left\{ -(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2 - (q_e^n)_3^2 \right\} = \arcsin \left\{ 1 - 2 \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right) \right\} \quad (\text{B.10.2})$$

$$\lambda = \arctan \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} - \arctan \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2} \quad (\text{B.10.3})$$

$$\alpha = \arctan \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} + \arctan \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2} \quad (\text{B.10.4})$$

すなわち  $\tilde{q}_e^n$  から緯度  $\phi$ 、経度  $\lambda$ 、Azimuth 角  $\alpha$  を知ることができる。

また式に三角関数を必要とするものが多いことから、ここでその関係を述べておく。まず  $\phi$  は、

$$\sin \phi = 1 - 2 \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right) \quad (\text{B.10.5})$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi &= 1 - \sin^2 \phi \\ &= 1 - \left( 1 - 2 \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right) \right)^2 \\ &= 4 \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right) - 4 \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right)^2 \\ &= 4 \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right) \left( 1 - \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right) \right) \\ &= 4 \left( (q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2 \right) \left( (q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10.6})$$

$$\cos \phi = 2\sqrt{(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2}\sqrt{(q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2} \quad (\geq 0) \quad (\text{B.10.7})$$

次に  $\lambda$  は

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= \tan \left( \arctan \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} - \arctan \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2} \right) \\ &= \frac{\tan \left( \arctan \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} \right) - \tan \left( \arctan \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2} \right)}{1 + \tan \left( \arctan \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} \right) \tan \left( \arctan \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2} \right)} \\ &= \frac{\frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} - \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2}}{1 + \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2}} \\ &= \frac{(q_e^n)_3(q_e^n)_2 - (q_e^n)_1(q_e^n)_0}{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 + (q_e^n)_3(q_e^n)_1} \end{aligned} \quad (\text{B.10.8})$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \lambda &= \frac{1}{1 + \tan^2 \lambda} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\{(q_e^n)_3(q_e^n)_2 - (q_e^n)_1(q_e^n)_0\}^2}{\{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 + (q_e^n)_3(q_e^n)_1\}^2}} \\ &= \frac{\{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 + (q_e^n)_3(q_e^n)_1\}^2}{\{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 + (q_e^n)_3(q_e^n)_1\}^2 + \{(q_e^n)_3(q_e^n)_2 - (q_e^n)_1(q_e^n)_0\}^2} \\ &= \frac{\{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 + (q_e^n)_3(q_e^n)_1\}^2}{\{(q_e^n)_0(q_e^n)_2\}^2 + \{(q_e^n)_3(q_e^n)_1\}^2 + \{(q_e^n)_3(q_e^n)_2\}^2 + \{(q_e^n)_1(q_e^n)_0\}^2} \\ &= \frac{\{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 + (q_e^n)_3(q_e^n)_1\}^2}{\{(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2\}^2 \{(q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2\}^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10.9})$$

$$\cos \lambda = -\frac{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 + (q_e^n)_3(q_e^n)_1}{\sqrt{(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2}\sqrt{(q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2}} \quad (\text{B.10.10})$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \lambda &= \frac{\tan^2 \lambda}{1 + \tan^2 \lambda} \\ &= \frac{\{(q_e^n)_3(q_e^n)_2 - (q_e^n)_1(q_e^n)_0\}^2}{\{(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2\}^2 \{(q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2\}^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10.11})$$

$$\sin \lambda = \frac{(q_e^n)_0(q_e^n)_1 - (q_e^n)_2(q_e^n)_3}{\sqrt{(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2}\sqrt{(q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2}} \quad (\text{B.10.12})$$

最後に  $\alpha$  は

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan \left( \arctan \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} + \arctan \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2} \right) \\ &= \frac{\frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} + \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2}}{1 - \frac{(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0} \frac{(q_e^n)_1}{(q_e^n)_2}} \\ &= \frac{(q_e^n)_0(q_e^n)_1 + (q_e^n)_2(q_e^n)_3}{(q_e^n)_0(q_e^n)_2 - (q_e^n)_1(q_e^n)_3} \end{aligned} \quad (\text{B.10.13})$$

$$\cos \alpha = \frac{(q_e^n)_1(q_e^n)_3 - (q_e^n)_0(q_e^n)_2}{\sqrt{(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2}\sqrt{(q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2}} \quad (\text{B.10.14})$$

$$\sin \alpha = \frac{(q_e^n)_0(q_e^n)_1 + (q_e^n)_2(q_e^n)_3}{\sqrt{(q_e^n)_0^2 + (q_e^n)_3^2} \sqrt{(q_e^n)_1^2 + (q_e^n)_2^2}} \quad (\text{B.10.15})$$

## B.11 $n$ -Frame と $b$ -Frame の関係

$n$ -Frame と  $b$ -Frame の関係は機体の現在の姿勢に相当する。 $n$ -Frame をオイラー角 yawing  $\Psi$ 、pitching  $\Theta$ 、rolling  $\Phi$  の順で回転させたときに  $b$ -Frame に一致する (図 B.4 参照) から

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n^b &= \begin{Bmatrix} \cos \frac{\Psi}{2} \\ \sin \frac{\Psi}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} \\ \sin \frac{\Theta}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} \\ \sin \frac{\Phi}{2} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \\ \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \\ \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \\ \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} - \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.11.1})$$

また逆に  $\tilde{q}_n^b$  がわかれば

$$\Psi = \arctan \frac{2((q_n^b)_1(q_n^b)_2 + (q_n^b)_0(q_n^b)_3)}{(q_n^b)_0^2 + (q_n^b)_1^2 - (q_n^b)_2^2 - (q_n^b)_3^2} \quad (\text{B.11.2})$$

$$\Theta = \arcsin \left( 2 \left( (q_n^b)_0(q_n^b)_2 - (q_n^b)_1(q_n^b)_3 \right) \right) \quad (\text{B.11.3})$$

$$\Phi = \arctan \frac{2((q_n^b)_2(q_n^b)_3 + (q_n^b)_0(q_n^b)_1)}{(q_n^b)_0^2 - (q_n^b)_1^2 - (q_n^b)_2^2 + (q_n^b)_3^2} \quad (\text{B.11.4})$$

である。

## 付録 C

# Earth Model(WGS-84)

本研究で構築する航法システムは地球での航行をターゲットとしている。従って、INS を用いるにあたり地球の曲率、および重力を数値的に計算できるようモデル化する必要がある。本研究では、現在一般的に採用されている地球の数値計算モデルである WGS-84 を採用することにした。そこで本章では、地球の数値計算モデルについて、および WGS-84 について言及する。

### C.1 楕円モデル

一般に地球の数値計算モデルを考える際は、自転軸通るように地球を切った切り口で考えられる。その切り口の形を楕円と近似することによって地球の数値計算モデルを構築することが容易となる。本項では、楕円の性質について説明する。

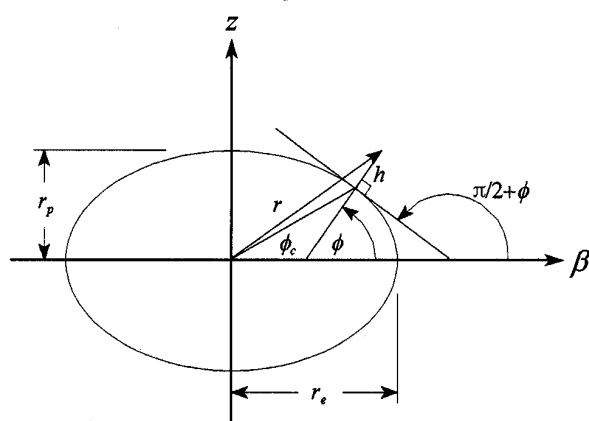


図 C.1: 地球モデル

楕円は一般に次の式で表される。

$$\frac{\beta^2}{r_e^2} + \frac{z^2}{r_p^2} = 1 \quad (\text{C.1.1})$$

両辺微分して

$$\frac{2\beta d\beta}{r_e^2} + \frac{2zdz}{r_p^2} = 0 \quad (\text{C.1.2})$$

すなわち

$$\frac{dz}{d\beta} = -\frac{br_p^2}{zr_e^2} \quad (\text{C.1.3})$$

図より緯度  $\phi$  と  $\frac{dz}{d\beta}$  の関係は、

$$\frac{dz}{d\beta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\frac{1}{\tan\phi} \quad (\text{C.1.4})$$

従って、

$$-\frac{1}{\tan\phi} = -\frac{\beta r_p^2}{zr_e^2} \quad (\text{C.1.5})$$

ここで、離心率  $\varepsilon$  なる変数

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{r_p^2}{r_e^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.1.6})$$

を導入すれば、

$$\frac{r_p^2}{r_e^2} = -(\varepsilon^2 - 1) \quad (\text{C.1.7})$$

より

$$\frac{z}{\beta} = (1 - \varepsilon^2) \tan\phi \quad (\text{C.1.8})$$

この式と (C.1.1) から、 $z$  を消去すると、

$$\beta = \frac{r_e \cos\phi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{C.1.9})$$

同様に  $\beta$  を消去すれば、

$$z = \frac{r_e (1 - \varepsilon^2) \sin\phi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{C.1.10})$$

## C.2 南北方向ならびに東西方向の曲率半径

前節で述べた数値計算モデルの南北方向 (経線上) の極率半径は次の式で与えられる。

$$R_{\text{meridian}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{d\beta^2}} \quad (\text{C.2.1})$$

ここで (C.1.3) を  $\beta$  で微分すれば、

$$\frac{d^2z}{d\beta^2} = -\frac{r_p^4}{r_e^2 z^3} \quad (\text{C.2.2})$$



であるから、これと (C.1.3)、(C.1.8)、(C.1.9) より

$$R_{\text{meridian}} = \frac{r_e (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{C.2.3})$$

また東西方向の極率半径は次の式で与えられる。

$$R_{\text{normal}} = \frac{\beta}{\cos \phi} \quad (\text{C.2.4})$$

従って (C.1.9) より

$$R_{\text{normal}} = \frac{r_e}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{C.2.5})$$

### C.3 重力

地球上で重力として観測されるものは2つに分離することが可能である。すなわち、万有引力と遠心力である。遠心力は地球は慣性系に対して、Earth Rate( $\Omega_{i/e}$ ) で回転しているために発生する力である。

$i$ -Frame に対して万有引力  $\vec{G}^i$  は次の式で与えられる。

$$\vec{G}^i = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{R^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_e}{R} \right)^2 \left( 1 - 5 \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right) \right) \frac{x}{R} + \dots \\ -\frac{\mu}{R^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_e}{R} \right)^2 \left( 1 - 5 \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right) \right) \frac{y}{R} + \dots \\ -\frac{\mu}{R^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_e}{R} \right)^2 \left( 3 - 5 \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right) \right) \frac{z}{R} + \dots \end{pmatrix} \quad (\text{C.3.1})$$

(ただし  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ )

$i$ -Frame に対して遠心力  $\vec{g}_{\text{CF}}$  は次の式で与えられる。

$$\vec{g}_{\text{CF}} = -\Omega_{e/i} \Omega_{e/i} \vec{r}^i \quad (\text{C.3.2})$$

従って両者を加えて、重力  $\vec{g}^i$  は

$$\vec{g}^i = \vec{G}^i - \Omega_{e/i} \Omega_{e/i} \vec{r}^i \quad (\text{C.3.3})$$

### C.4 WGS-84

本研究で採用する地球の数値計算モデル、WGS-84 の定数は表 (C.1) によって与えられる。

WGS-84 における南北方向、東西方向の極率半径はそれぞれ (C.2.3)、(C.2.5) に必要な定数を代入することによって求められる。

また重力は WGS-84 では以下の式で与えられる。

$$g = g_{\text{WGS0}} \frac{(1 + g_{\text{WGS1}} \sin^2 \phi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{C.4.1})$$

表 C.1: WGS-84 の定数

赤道半径 ( $r_e$ )	6378137	m
自転速度 (Earth Rate、 $\Omega_{e/i}$ )	$7.292115 \times 10^{-5}$	rad/s
地球重力定数 ( $\mu$ )	$3.986005 \times 10^{14}$	$\text{m}^3/\text{s}^2$
地球重力第二定数 ( $J_2$ )	$1.08263 \times 10^{-3}$	
平滑度 ( $f$ )	298.257223563	
極半径 ( $r_p$ )	6356752.3142	m
第一偏心性 ( $\epsilon$ )	0.0818191908426	
赤道上重力 ( $g_{\text{WGS}_0}$ )	9.7803267714	$\text{m}/\text{s}^2$
重力公式定数 ( $g_{\text{WGS}_1}$ )	0.00193185138639	

## 付録 D

# Euler 角による Loose coupling INS/GPS アルゴリズム

本章では一般的な位置を Euler 角、すなわち緯度  $\phi$ 、経度  $\lambda$ 、Azimuth 角  $\alpha$  で表わした場合の Loose coupling INS/GPS アルゴリズムを記す。本文の構成にならない、システム方程式、観測方程式、誤差システム方程式、誤差観測方程式の順に示す。Kalman Filter との統合は第 3.5 と同じであるので、ここでは割愛する。

### D.1 システム方程式

システム方程式における状態量  $\underline{x}$  は

$$\underline{x} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_e^n \\ \phi \\ \lambda \\ \alpha \\ h \\ \vec{q}_n^b \end{bmatrix} \quad (\text{D.1.1})$$

であり、入力  $\underline{u}$  は

$$\underline{u} \equiv \begin{bmatrix} \vec{a}^b \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \\ \vec{g}^n \end{bmatrix} \quad (\text{D.1.2})$$

である。以下、速度  $\dot{\vec{r}}_e^n$ 、位置  $\phi, \lambda, \alpha, h$ 、姿勢  $\vec{q}_n^b$  について見ていく。

#### D.1.1 速度の方程式

速度の方程式の導出は 3.3.1 章と同じである。従って速度の方程式は式 (3.3.18) に倣い

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} &= \vec{q}_b^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \vec{q}_b^n + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\ &\quad - \left\{ \begin{matrix} 0 \\ (2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \dot{\vec{r}}_e^n \end{matrix} \right\} - \left\{ \text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

となる。ここで  $\vec{\omega}_{e/i}^n$  は

$$\vec{\omega}_{e/i}^n = \text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] \vec{\omega}_{e/i}^e = \text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{e/i} \end{pmatrix} \quad (\text{D.1.4})$$

である。また  $\vec{\omega}_{n/e}^n$  は

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{n/e}^n &\equiv \begin{pmatrix} \rho_X \\ \rho_Y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\dot{r}_e^n)_Y \left( \frac{\cos \alpha^2}{R_{\text{normal}+h}} + \frac{\sin \alpha^2}{R_{\text{meridian}+h}} \right) + (\dot{r}_e^n)_X \cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{R_{\text{normal}+h}} - \frac{1}{R_{\text{meridian}+h}} \right) \\ -(\dot{r}_e^n)_X \left( \frac{\cos \alpha^2}{R_{\text{meridian}+h}} + \frac{\sin \alpha^2}{R_{\text{normal}+h}} \right) + (\dot{r}_e^n)_Y \cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{R_{\text{meridian}+h}} - \frac{1}{R_{\text{normal}+h}} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\because (3.3.35)) \end{pmatrix} \quad (\text{D.1.5})$$

である。さらに  $\text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha]$  は  $\phi, \lambda, \alpha$  から生成した  $e$ -Frame から  $n$ -Frame への回転行列であり、

$$\begin{aligned} &\text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] \\ &= \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \phi \cos \lambda - \sin \alpha \sin \lambda & -\cos \alpha \sin \phi \sin \lambda + \sin \alpha \cos \lambda & \cos \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda & \sin \alpha \sin \phi \sin \lambda + \cos \alpha \cos \lambda & -\sin \alpha \cos \phi \\ -\cos \phi \cos \lambda & -\cos \phi \sin \lambda & -\sin \phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.1.6})$$

である。また  $\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e)$  は式 (3.3.36) より

$$\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) = \Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \cos \phi \begin{pmatrix} -\cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1.7})$$

である。

## D.1.2 位置の方程式

位置の方程式であるが、緯度  $\phi$ 、経度  $\lambda$ 、高度  $h$  については参考文献 [1] の pp.52, 57 より

$$\frac{d\phi}{dt} = -\cos \alpha \rho_Y - \sin \alpha \rho_X \quad (\text{D.1.8})$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{-\sin \alpha \rho_Y + \cos \alpha \rho_X}{\cos \phi} \quad (\text{D.1.9})$$

$$\frac{d\alpha}{dt} \equiv \dot{\lambda} \sin \phi = \frac{d\lambda}{dt} \sin \phi \quad (\text{D.1.10})$$

また高度  $h$  の方程式は式 (3.3.39) と同じく

$$\frac{d}{dt} h = -v_D \equiv -(\dot{r}_e^n)_Z \quad (\text{D.1.11})$$

である。

### D.1.3 姿勢の方程式

姿勢の方程式は式 (3.3.43) と等しく

$$\dot{\tilde{q}}_n^b = \frac{1}{2} \left[ \tilde{q}_n^b \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \tilde{\omega}_{b/i}^b \end{matrix} \right\} - \left( \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \tilde{\omega}_{e/i}^n \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \tilde{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \right) \tilde{q}_n^b \right] \quad (\text{D.1.12})$$

である。

## D.2 観測方程式

観測量  $\underline{z}$  は、GPS が出力する位置情報ならびに速度情報で構成される。すなわち

$$\underline{z} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}}_e^n \\ \phi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_{\text{GPS}} \quad (\text{D.2.1})$$

であり、観測方程式は

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}}_e^n \\ \phi \\ \lambda \\ \alpha \\ h \\ \tilde{q}_n^b \end{bmatrix} + \underline{v} \quad (\text{D.2.2})$$

$$\equiv H\underline{x} + \underline{v}$$

である。 $\underline{v}$  はホワイトノイズである。

## D.3 誤差システム方程式

システムの誤差  $\Delta\underline{x}$  は

$$\Delta\underline{x} \equiv \begin{bmatrix} \Delta\dot{\tilde{r}}_e^n \\ \Delta\phi \\ \Delta\lambda \\ \Delta\alpha \\ \Delta h \\ \Delta\tilde{u}_n^b \end{bmatrix} \quad (\text{D.3.1})$$

であり、入力の誤差  $\Delta\underline{u}$  は

$$\Delta\underline{u} \equiv \begin{bmatrix} \Delta\tilde{a}^b \\ \Delta\tilde{\omega}_{b/i}^b \\ \Delta\tilde{g}^n \end{bmatrix} \quad (\text{D.3.2})$$

である。ここで  $\tilde{q}_n^b$  の誤差が微小誤差ベクトル要素  $\Delta\tilde{u}_n^b$  であることに注意されたい。

以降、システム方程式を誤差について線形化していくと次のようになる。

## D.3.1 速度の誤差方程式

速度の方程式 (D.1.3) を誤差  $\Delta\dot{\vec{r}}_e^n$  について求めると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta\dot{\vec{r}}_e^n &= \text{DCM}[\tilde{q}_n^{b*}] \Delta\vec{a}^b - 2\text{DCM}[\tilde{q}_n^{b*}] \vec{a}^b \times \Delta\vec{u}_n^b + \Delta\vec{g}^n \\ &\quad + \dot{\vec{r}}_e^n \times \left( 2\Delta\vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n \right) - \left( 2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n \right) \times \Delta\dot{\vec{r}}_e^n \\ &\quad - \Delta\text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \right) - \text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] \Delta \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \left( \vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.3.3})$$

となる。以下、第3項 ( $\Delta\vec{g}^n$ ) までは第3章と同じなので第4項以降について順に見ていく。

まず第4項の  $\Delta\vec{\omega}_{e/i}^n$  であるが

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\omega}_{e/i}^n &= \Delta \left( \text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{e/i} \end{pmatrix} \right) \\ &= (\Delta\text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha]) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{e/i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.3.4})$$

である。ここで  $\Delta\text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha]$  を計算すると

$$\begin{aligned} \Delta\text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha] &= \begin{bmatrix} -c\alpha c\phi c\lambda & -c\alpha s\phi s\lambda & -c\alpha s\phi \\ s\alpha c\phi c\lambda & s\alpha c\phi s\lambda & s\alpha s\phi \\ s\phi c\lambda & s\phi s\lambda & -c\phi \end{bmatrix} \Delta\phi \\ &\quad + \begin{bmatrix} (c\alpha s\phi s\lambda - s\alpha c\lambda) & (c\alpha s\phi c\lambda + s\alpha s\lambda) & 0 \\ -(s\alpha s\phi s\lambda + c\alpha c\lambda) & (s\alpha s\phi c\lambda - c\alpha s\lambda) & 0 \\ c\phi s\lambda & -c\phi c\lambda & 0 \end{bmatrix} \Delta\lambda \\ &\quad + \begin{bmatrix} (s\alpha s\phi c\lambda - c\alpha s\lambda) & (s\alpha s\phi s\lambda + c\alpha c\lambda) & -s\alpha c\phi \\ (c\alpha s\phi c\lambda + s\alpha s\lambda) & (c\alpha s\phi s\lambda - s\alpha c\lambda) & -c\alpha c\phi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\alpha \end{aligned} \quad (\text{D.3.5})$$

となるから

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\omega}_{e/i}^n &= (\Delta\text{DCM}[\phi, \lambda, \alpha]) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{e/i} \end{pmatrix} \\ &= \Omega_{e/i} \begin{bmatrix} -c\alpha s\phi & 0 & -s\alpha c\phi \\ s\alpha s\phi & 0 & -c\alpha c\phi \\ -c\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\lambda \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.3.6})$$

よって

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_e^n \times 2\Delta\vec{\omega}_{e/i}^n &= 2\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\vec{r}}_e^n)_Z & (\dot{\vec{r}}_e^n)_X \\ (\dot{\vec{r}}_e^n)_Z & 0 & -(\dot{\vec{r}}_e^n)_X \\ -(\dot{\vec{r}}_e^n)_Y & (\dot{\vec{r}}_e^n)_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c\alpha s\phi & 0 & -s\alpha c\phi \\ s\alpha s\phi & 0 & -c\alpha c\phi \\ -c\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\lambda \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \\ &= 2\Omega_{e/i} \begin{bmatrix} -s\alpha s\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Z - c\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Y & 0 & c\alpha c\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Z \\ -c\alpha s\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Z + c\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_X & 0 & -s\alpha c\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Z \\ c\alpha s\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Y + s\alpha s\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_X & 0 & s\alpha c\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Y - c\alpha c\phi (\dot{\vec{r}}_e^n)_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\lambda \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.3.7})$$

また第 4 項の  $\Delta\vec{\omega}_{n/e}^n$  がある部分については式 (3.5.15) より

$$\Delta\rho_X \equiv \Delta(\vec{\omega}_{n/e}^n)_X = \frac{1}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_Y - \frac{(\dot{r}_e^n)_Y}{(r_e+h)^2} \Delta h \quad (\text{D.3.8})$$

$$\Delta\rho_Y \equiv \Delta(\vec{\omega}_{n/e}^n)_Y = -\frac{1}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_X + \frac{(\dot{r}_e^n)_X}{(r_e+h)^2} \Delta h \quad (\text{D.3.9})$$

であるから

$$\begin{aligned} \dot{r}_e^n \times \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n &= \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{r}_e^n)_Z & (\dot{r}_e^n)_Y \\ (\dot{r}_e^n)_Z & 0 & -(\dot{r}_e^n)_X \\ -(\dot{r}_e^n)_Y & (\dot{r}_e^n)_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\rho_X \\ \Delta\rho_Y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\dot{r}_e^n)_Z \Delta\rho_Y \\ (\dot{r}_e^n)_Z \Delta\rho_X \\ -(\dot{r}_e^n)_Y \Delta\rho_X + (\dot{r}_e^n)_X \Delta\rho_Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(\dot{r}_e^n)_Z}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_X - \frac{(\dot{r}_e^n)_X (\dot{r}_e^n)_Z}{(r_e+h)^2} \Delta h \\ \frac{(\dot{r}_e^n)_Z}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_Y - \frac{(\dot{r}_e^n)_Y (\dot{r}_e^n)_Z}{(r_e+h)^2} \Delta h \\ -\frac{(\dot{r}_e^n)_X}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_X - \frac{(\dot{r}_e^n)_Y}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_Y + \frac{(\dot{r}_e^n)_X^2 + (\dot{r}_e^n)_Y^2}{(r_e+h)^2} \Delta h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.3.10})$$

第 5 項、第 6 項は今まで述べてきたことをふまえて行列演算を行えば求める。

第 7 項は  $\Delta(\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e))$  が

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e)) &= \Omega_{e/i}^2 \Delta \left( (R_{\text{normal}} + h) \cos \phi \begin{pmatrix} -\cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \Omega_{e/i}^2 \cos \phi \begin{pmatrix} -\cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h \\ &\quad - \Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \sin \phi \begin{pmatrix} -\cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \phi \\ &\quad + \Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \cos \phi \begin{pmatrix} \sin \lambda \\ -\cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \lambda \end{aligned} \quad (\text{D.3.11})$$

ことを利用すればよい。

### D.3.2 位置の誤差方程式

位置の方程式の Euler 角の式 (D.1.8)、(D.1.9)、(D.1.10) を誤差  $\Delta\phi$ 、 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\alpha$  について求めると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta\phi &= \sin \alpha (\vec{\omega}_{n/e}^n)_Y \Delta\alpha - \cos \alpha \Delta(\vec{\omega}_{n/e}^n)_Y - \cos \alpha (\vec{\omega}_{n/e}^n)_X \Delta\alpha - \sin \alpha \Delta(\vec{\omega}_{n/e}^n)_X \\ &= \left( \sin \alpha (\vec{\omega}_{n/e}^n)_Y - \cos \alpha (\vec{\omega}_{n/e}^n)_X \right) \Delta\alpha \\ &\quad + \frac{\cos \alpha}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_X - \frac{\sin \alpha}{r_e+h} \Delta(\dot{r}_e^n)_Y + \left( -\frac{(\dot{r}_e^n)_X \cos \alpha}{(r_e+h)^2} + \frac{(\dot{r}_e^n)_Y \sin \alpha}{(r_e+h)^2} \right) \Delta h \end{aligned} \quad (\text{D.3.12})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta\lambda &= \frac{-\cos\alpha\rho_Y\Delta\alpha - \sin\alpha\Delta(\vec{\omega}_{n/e}^n)_Y - \sin\alpha\rho_X\Delta\alpha + \cos\alpha\Delta(\vec{\omega}_{n/e}^n)_X}{\cos\phi} \\
&\quad + \frac{-(\dot{\lambda}\cos\phi)\sin\phi}{\cos\phi^2}\Delta\phi \\
&= \frac{-\cos\alpha\rho_Y - \sin\alpha\rho_X}{\cos\phi}\Delta\alpha \\
&\quad + \frac{\sin\alpha}{(r_e+h)\cos\phi}\Delta(\dot{r}_e^n)_X + \frac{\cos\alpha}{(r_e+h)\cos\phi}\Delta(\dot{r}_e^n)_Y \\
&\quad - \frac{\sin\alpha(\dot{r}_e^n)_X + \cos\alpha(\dot{r}_e^n)_Y}{(r_e+h)^2\cos\phi}\Delta h \\
&\quad - \dot{\lambda}\tan\phi\Delta\phi \\
\frac{d}{dt}\Delta\alpha &= \sin\phi\Delta\dot{\lambda} + \dot{\lambda}\cos\phi\Delta\phi
\end{aligned} \tag{D.3.13}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\alpha = \sin\phi\Delta\dot{\lambda} + \dot{\lambda}\cos\phi\Delta\phi \tag{D.3.14}$$

となる。

残りの高度  $h$  については式 (3.5.25) と等しく

$$\frac{d}{dt}\Delta h = -\Delta(\dot{r}_e^n)_Z \tag{D.3.15}$$

である。

### D.3.3 姿勢の誤差方程式

姿勢の方程式 (D.1.12) を微小誤差ベクトル要素  $\Delta\vec{u}_n^b$  について求めると

$$\frac{d}{dt}\Delta\vec{u}_n^b = \frac{1}{2} \left\{ \text{DCM} \left[ \vec{q}_n^{b*} \right] \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b - \Delta\vec{\omega}_{e/i}^n - \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n - 2(\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \Delta\vec{u}_n^b \right\} \tag{D.3.16}$$

となる。各項については今まで述べてきたことから求めることが可能である。

## D.4 誤差観測方程式

誤差観測方程式は位置の表現に Quaternion を用いたときと異なり、単純に式 (3.5.3) を適用するだけである。よって

$$\begin{aligned}
z - H\bar{x} &\equiv \begin{bmatrix} \dot{r}_e^n \\ \phi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_{\text{GPS}} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_e^n \\ \phi \\ \lambda \\ \alpha \\ h \\ \vec{q}_n^b \end{bmatrix}_{\bar{x}} \\
&= - \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\equiv H_\Delta = H} \begin{bmatrix} \Delta\dot{r}_e^n \\ \Delta\phi \\ \Delta\lambda \\ \Delta\alpha \\ \Delta h \\ \Delta\vec{u}_n^b \end{bmatrix} + \underline{v}
\end{aligned} \tag{D.4.1}$$



となる。

## D.5 Kalman Filter との統合

### D.5.1 Time Update

### D.5.2 Measurement Update

## 付録 E

# 単純線形化による Loose coupling INS/GPS アルゴリズム

Kalman Filter を用いて Loose coupling INS/GPS アルゴリズムを構成する場合、3.5 節で述べたとおり、システム方程式は非線形、観測方程式は線形である。そこで状態量の推定値  $\hat{x}$  とその真値  $x$  の微小誤差  $\Delta x$  を考え、システム方程式を誤差について単純に線形化した誤差システム方程式、同じく誤差について導いた誤差観測方程式を導入し、Kalman Filter を適用するのが一般的である。この場合、状態量  $\Delta x$  は

$$\Delta \underline{x} \equiv \begin{bmatrix} \Delta \dot{r}_e^n \\ \Delta \dot{q}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta \dot{q}_n^b \end{bmatrix} \quad (\text{E.0.1})$$

誤差システム方程式の入力  $\Delta u$  は

$$\Delta \underline{u} \equiv \begin{bmatrix} \Delta \vec{a}^b \\ \Delta \vec{\omega}_{b/i}^b \\ \Delta \vec{g}^n \end{bmatrix} \quad (\text{E.0.2})$$

となる。

本章では単純に線形化を行った場合の誤差システム方程式、並びに誤差観測方程式を示す。なお Kalman Filter との統合は第 3.5 と同じであるので、ここでは割愛する。

## E.1 誤差システム方程式

システム方程式は 3.3 節にある INS の慣性航法方程式である。すなわち速度の方程式 (3.3.18)、位置の方程式 (3.3.38), (3.3.39)、姿勢の方程式 (3.3.43) であり、誤差システム方程式はこれらを誤差について線形化することによって得られる。

以下、順に見ていく。

### E.1.1 速度の方程式

速度の方程式 (3.3.18) について考えると以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} &= \frac{d}{dt} \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n + \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \right) \\
&= \left[ (\tilde{q}_n^b + \Delta \tilde{q}_n^b) \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b + \Delta \vec{a}^b \end{Bmatrix} (\tilde{q}_n^b + \Delta \tilde{q}_n^b)^* + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n + \Delta \vec{g}^n \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad - \left. \begin{Bmatrix} 0 \\ (2(\vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n) + (\vec{\omega}_{n/e}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n)) \times (\dot{\vec{r}}_e^n + \Delta \dot{\vec{r}}_e^n) \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad - \left. (\tilde{q}_e^n + \Delta \tilde{q}_e^n)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{r}_e + \Delta \vec{r}_e)) \end{Bmatrix} (\tilde{q}_e^n + \Delta \tilde{q}_e^n) \right] \\
&\quad - \left[ \tilde{q}_n^b \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^{b*} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{g}^n \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad - \left. \begin{Bmatrix} 0 \\ (2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad - \left. \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \right] \tag{E.1.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} &= \Delta \tilde{q}_n^b \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^{b*} + \tilde{q}_n^b \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{a}^b \end{Bmatrix} \Delta \tilde{q}_n^{b*} + \tilde{q}_n^b \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \vec{a}^b \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^{b*} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \vec{g}^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ (2\Delta \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \dot{\vec{r}}_e^n + (2\vec{\omega}_{e/i}^n + \vec{\omega}_{n/e}^n) \times \Delta \dot{\vec{r}}_e^n \end{Bmatrix} \\
&\quad - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \\
&\quad - \Delta \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \vec{r}_e) \end{Bmatrix} \Delta \tilde{q}_e^n \tag{E.1.2}
\end{aligned}$$

ここで

- $\Delta \vec{\omega}_{e/i}^n$  は (3.3.19)、(3.3.20) より  $\vec{\omega}_{e/i}$  は地球の自転速度であるから一定と考え

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \vec{\omega}_{e/i}^n \end{Bmatrix} = (\tilde{q}_e^n + \Delta \tilde{q}_e^n)^* \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} (\tilde{q}_e^n + \Delta \tilde{q}_e^n) - \tilde{q}_e^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^i \end{Bmatrix} \tilde{q}_e^n \tag{E.1.3}$$

- $\vec{\omega}_{n/e}^n$  が (3.3.35)、(3.3.26)、(3.3.24)、(3.3.25) から以下のように近似できる。

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{Bmatrix} &= \tilde{q}_g^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^g \end{Bmatrix} \tilde{q}_g^n \\
&= \tilde{q}_g^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \left( \frac{v_E}{R_{\text{normal}}+h} \right) \\ -\frac{v_N}{R_{\text{meridian}}+h} \\ 0 \end{Bmatrix} \tilde{q}_g^n \approx \tilde{q}_g^{n*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r_e+h} \begin{pmatrix} v_E \\ -v_N \\ 0 \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \tilde{q}_g^n \\
&= \frac{1}{r_e+h} \tilde{q}_g^{n*} \tilde{q}_n^{g*} \begin{Bmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} (i_e^n)_Y \\ -(i_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \tilde{q}_n^g \tilde{q}_g^n \\
&\quad (\because Z_g \text{ 軸と } Z_n \text{ 軸は一致}) \\
&= \frac{1}{r_e+h} \begin{Bmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} (i_e^n)_Y \\ -(i_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{E.1.4}$$

従って  $\Delta \vec{\omega}_{n/e}^n$  は

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{\omega}_{n/e}^n &= \frac{1}{r_e+(h+\Delta h)} \begin{pmatrix} (i_e^n)_Y + \Delta(i_e^n)_Y \\ -(i_e^n)_X - \Delta(i_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{r_e+h} \begin{pmatrix} (i_e^n)_Y \\ -(i_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_e+h} \begin{pmatrix} \Delta(i_e^n)_Y \\ -\Delta(i_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{(r_e+h)^2} \begin{pmatrix} (i_e^n)_Y \\ -(i_e^n)_X \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h
\end{aligned} \tag{E.1.5}$$

- $\vec{\omega}_{e/i}^e \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e)$  は (3.3.37) より

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_{e/i}^e \cdot 2 \times (\vec{\omega}_{e/i}^e \times \Delta \vec{r}_e) &= 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + (h + \Delta h)) \\
&\quad \begin{pmatrix} (q_0 + \Delta q_0)(q_2 + \Delta q_2) + (q_1 + \Delta q_1)(q_3 + \Delta q_3) \\ (q_3 + \Delta q_3)(q_2 + \Delta q_2) - (q_1 + \Delta q_1)(q_0 + \Delta q_0) \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{q}_e^n \\
&\quad - 2\Omega_{e/i}^2 (R_{\text{normal}} + h) \begin{pmatrix} q_0 q_2 + q_1 q_3 \\ q_3 q_2 - q_1 q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{q}_e^n \\
&= 2\Omega_{e/i}^2 \left\{ \begin{pmatrix} q_0 q_2 + q_1 q_3 \\ q_3 q_2 - q_1 q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{q}_e^n \Delta h \right. \\
&\quad \left. + (R_{\text{normal}} + h) \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_1 & -q_0 & q_3 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{q}_e^n \Delta \tilde{q}_e^n \right\}
\end{aligned} \tag{E.1.6}$$

## E.1.2 位置の方程式

位置の方程式 (3.3.38) および (3.3.39) について考えると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta\tilde{q}_e^n &= \frac{1}{2}(\tilde{q}_e^n + \Delta\tilde{q}_e^n) \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n + \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{q}_e^n \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{q}_e^n \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}\Delta\tilde{q}_e^n \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\}\end{aligned}\quad (\text{E.1.7})$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{h} &= -((\dot{r}_e^n)_Z + \Delta(\dot{r}_e^n)_Z) - (-\dot{r}_e^n)_Z \\ &= -\Delta(\dot{r}_e^n)_Z\end{aligned}\quad (\text{E.1.8})$$

### E.1.3 姿勢の方程式

姿勢の方程式 (3.3.43) について考えると次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta\tilde{q}_n^b &= \frac{1}{2} \left[ (\tilde{q}_n^b + \Delta\tilde{q}_n^b) \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b + \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \end{matrix} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left( \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n + \Delta\vec{\omega}_{e/i}^n \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n + \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \right) (\tilde{q}_n^b + \Delta\tilde{q}_n^b) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \tilde{q}_n^b \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \end{matrix} \right\} - \left( \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \right) \tilde{q}_n^b \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \Delta\tilde{q}_n^b \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{b/i}^b \end{matrix} \right\} + \tilde{q}_n^b \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \Delta\vec{\omega}_{b/i}^b \end{matrix} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left( \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{e/i}^n \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \right) \Delta\tilde{q}_n^b - \left( \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \Delta\vec{\omega}_{e/i}^n \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \Delta\vec{\omega}_{n/e}^n \end{matrix} \right\} \right) \tilde{q}_n^b \right]\end{aligned}\quad (\text{E.1.9})$$

### E.1.4 誤差システム方程式

以上、速度の方程式 (E.1.1)、位置の方程式 (E.1.7) (E.1.8)、姿勢の方程式 (E.1.9) についてそれぞれ見てきたが、まとめると以下のようなになる。

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}\quad (\text{E.1.10})$$

行列  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  は



$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
(q_n^b)_0^2 + (q_n^b)_1^2 - (q_n^b)_2^2 - (q_n^b)_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_1(q_n^b)_2 + (q_n^b)_0(q_n^b)_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_1(q_n^b)_2 - (q_n^b)_0(q_n^b)_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_1(q_n^b)_3 + (q_n^b)_0(q_n^b)_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_1(q_n^b)_3 - (q_n^b)_0(q_n^b)_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_2(q_n^b)_3 + (q_n^b)_1(q_n^b)_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_2(q_n^b)_3 - (q_n^b)_1(q_n^b)_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(q_n^b)_0^2 - (q_n^b)_1^2 - (q_n^b)_2^2 + (q_n^b)_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_1(q_n^b)_2 - (q_n^b)_0(q_n^b)_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_1(q_n^b)_2 + (q_n^b)_0(q_n^b)_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_2(q_n^b)_3 + (q_n^b)_1(q_n^b)_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2((q_n^b)_2(q_n^b)_3 - (q_n^b)_1(q_n^b)_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(q_n^b)_0^2 - (q_n^b)_1^2 - (q_n^b)_2^2 + (q_n^b)_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
- (q_n^b)_1 / 2 & - (q_n^b)_0 / 2 & - (q_n^b)_3 / 2 & - (q_n^b)_2 / 2 & - (q_n^b)_1 / 2 & - (q_n^b)_0 / 2 & - (q_n^b)_3 / 2 & - (q_n^b)_2 / 2 & - (q_n^b)_1 / 2 & - (q_n^b)_0 / 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(q_n^b)_0 / 2 & (q_n^b)_3 / 2 & (q_n^b)_2 / 2 & (q_n^b)_1 / 2 & (q_n^b)_0 / 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - (q_n^b)_3 / 2 & - (q_n^b)_2 / 2 & - (q_n^b)_1 / 2 & - (q_n^b)_0 / 2 & 0 & 0 \\
(q_n^b)_3 / 2 & (q_n^b)_2 / 2 & (q_n^b)_1 / 2 & (q_n^b)_0 / 2 & 0 & - (q_n^b)_1 / 2 & - (q_n^b)_2 / 2 & - (q_n^b)_3 / 2 & - (q_n^b)_0 / 2 & 0 & (q_n^b)_2 / 2 & (q_n^b)_1 / 2 & (q_n^b)_0 / 2 & 0 & 0 & 0 \\
- (q_n^b)_2 / 2 & - (q_n^b)_1 / 2 & - (q_n^b)_0 / 2 & 0 & 0 & - (q_n^b)_1 / 2 & - (q_n^b)_2 / 2 & - (q_n^b)_3 / 2 & - (q_n^b)_0 / 2 & 0 & (q_n^b)_2 / 2 & (q_n^b)_1 / 2 & (q_n^b)_0 / 2 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right]
\end{aligned}$$

(E.1.12)

B =

## E.2 誤差観測方程式

誤差観測方程式は元のシステム方程式の状態量  $\underline{x}$  と導入した誤差  $\Delta \underline{x}$  がそのまま対応するので誤差観測方程式は容易に導かれる。すなわち式 (3.5.3) より誤差観測方程式は

$$\begin{aligned} \underline{z} - H\underline{x} &= -H \begin{bmatrix} \Delta \dot{r}_e^n \\ \Delta \dot{q}_e^n \\ \Delta h \\ \Delta \dot{q}_n^b \end{bmatrix} + v \\ &= - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + v \end{aligned} \tag{E.2.1}$$

である。



## 付録 F

# Allan Variance

本研究で使用する慣性センサを評価するにあたり Allan Variance [14] を用いた。本章では、Allan Variance について説明する。

Allan Variance とは、時計等の精度の指標として定められた値である。2 標本分散の 1 種であり、この指標を用いることによって、どれだけ時間的に機器が安定性しているかを知ることができる。時計を例にして言うならば、あるとき時計を見てそれから 1 日が経過した後に、その同じ時計がどの程度正確に 1 日を刻んでいるかを測る指標である。

今回は慣性センサとして MEMS ジャイロ、MEMS 加速度計を使用した。これらの機器は電源を入れた後にゼロ点が時間的に大きく変動する性質がある。そこで今回、このゼロ点の時間的安定性をモデル化するために、Allan Variance を用いた。

Allan Variance は以下の式で定義される。

$$AVAR(\tau) = \frac{1}{2(n-1)} \sum^n \left( \frac{\sum_{forward} y - \sum_{backward} y}{\tau} \right)^2 \quad (F.0.1)$$

Allan Variance を計算するソフト **AlaVar** のヘルプによれば、その算出過程は以下の C 言語コードのようになる。

```

1  double allan_variance(double x[N+1], double tau_0, double tau){
2  double y[N];
3  for(unsigned k = 0; k < N){
4      y[k] = (x[k+1] - x[k]) / tau;
5  }
6  double m = tau / tau_0;
7  double Y[N-m+1];
8  for(unsigned k = 0; k < N-m+1; k++){
9      Y[k] = 0;
10     for(unsigned j = k; j < k+m; j++){
11         Y[k] += y(j);
12     }
13     Y[k] /= m;
14 }
15
16 double sum = 0;
17 double P = N / m - 1;
18 for(unsigned k = 1; k < P; k++){

```

```
19     sum += pow((Y[1 + k * m] - Y[1 + (k - 1) * m]), 2);
20   }
21   return sum / 2 * (P - 1);
22 }
```

## 付録 G

# プロトタイプ基板

実験で用いたプロトタイプの USB マイコン、加速度計、ジャイロ、GPS が搭載されたプリント基板は、専用ソフト **Eagle** で版をおこし、格安基板製造メーカーであるブルガリアの **Olimex** に製造を依頼した。

本章ではその製作した基板の回路図、アートワークの資料を記載する。

### G.1 USB マイコン基板

図 **G.1** に回路図を示す。図 **G.2** に基板アートワークを示す。

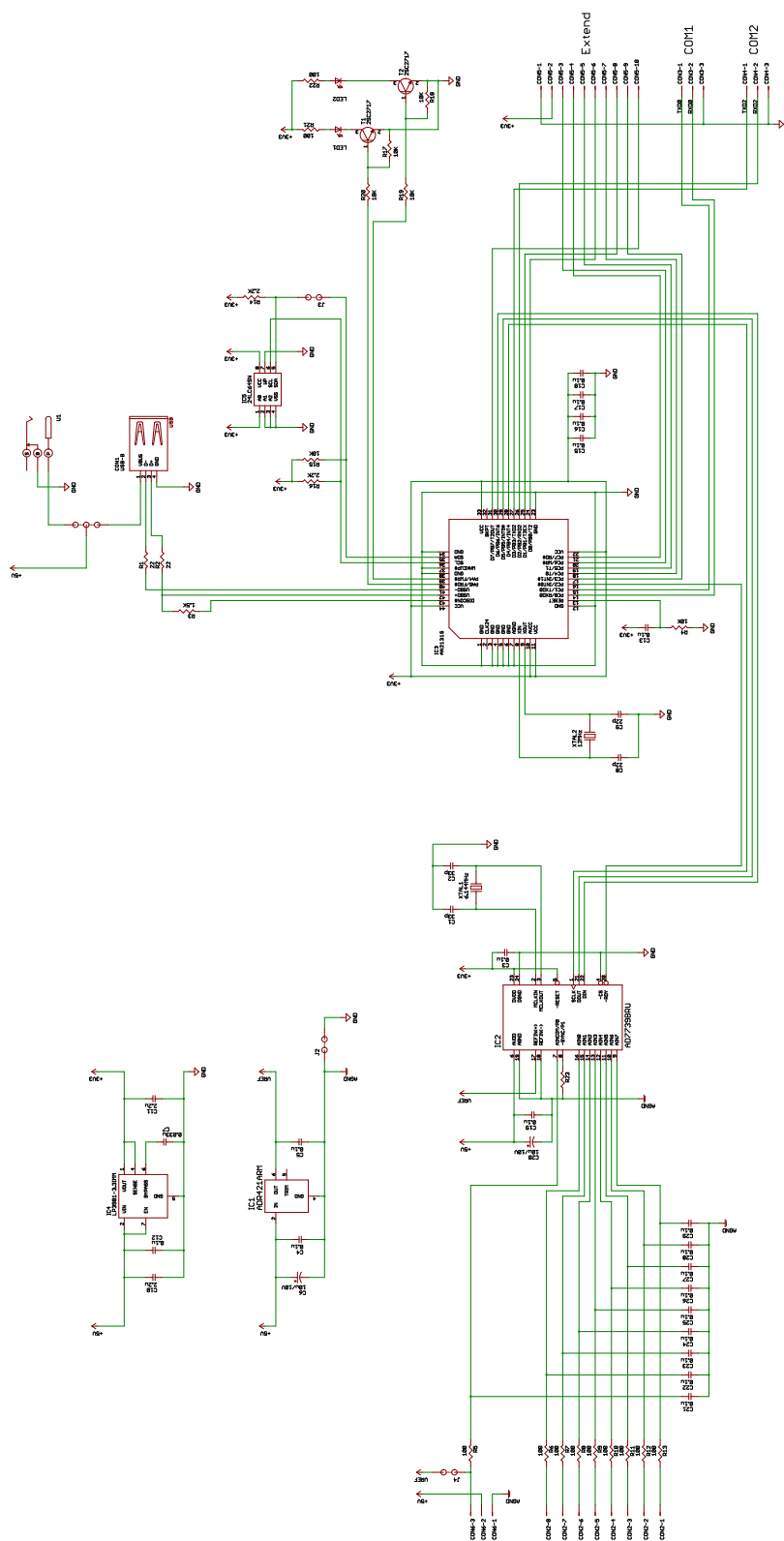


図 G.1: USB マイコン基板 回路図

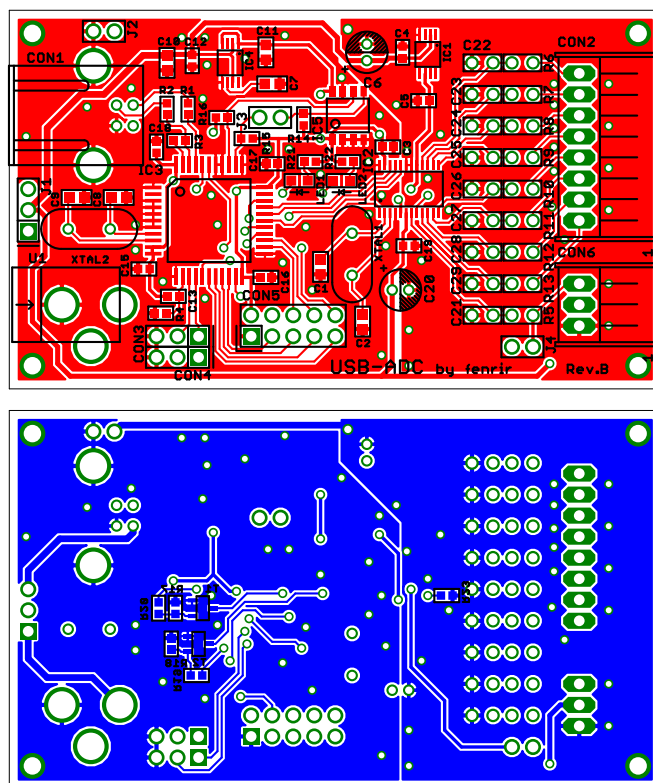


図 G.2: USB マイコン基板 アートワーク

## G.2 加速度計基板

図 G.3 に回路図を示す。図 G.4 に基板アートワークを示す。

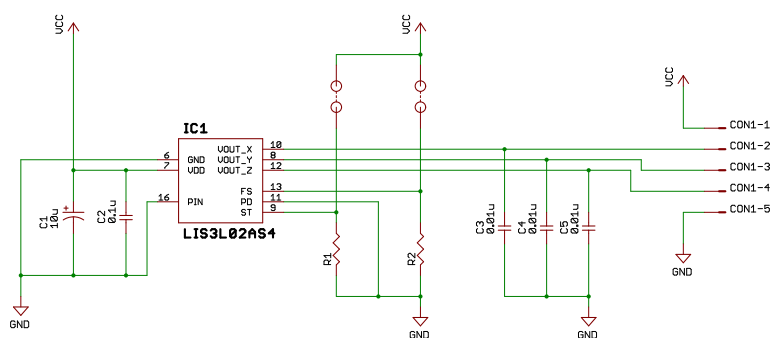


図 G.3: 加速度計基板 回路図

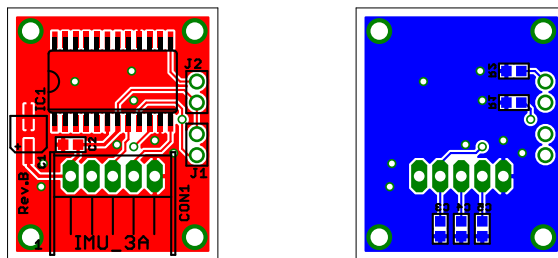


図 G.4: 加速度計基板 アートワーク

### G.3 ジャイロ基板

図 G.5 に回路図を示す。図 G.6 に基板アートワークを示す。

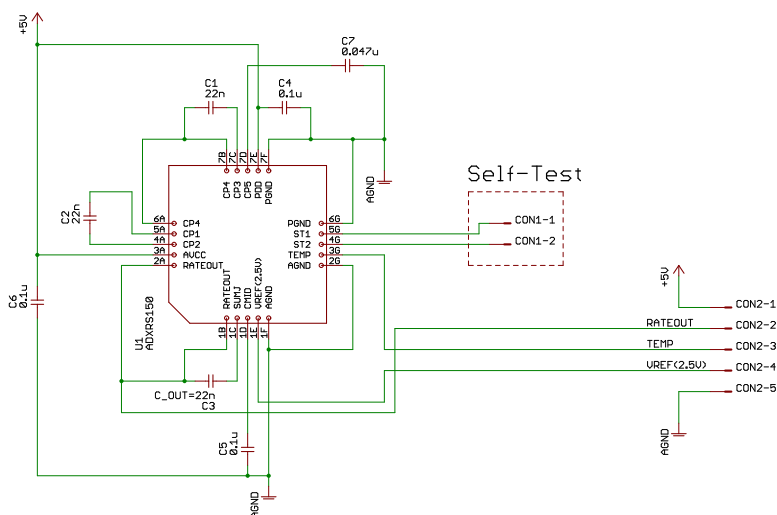


図 G.5: ジャイロ基板 回路図

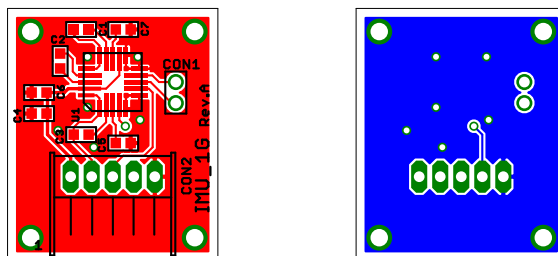


図 G.6: ジャイロ基板 アートワーク

## G.4 GPS 基板

図 G.7 に回路図を示す。図 G.8 に基板アートワークを示す。

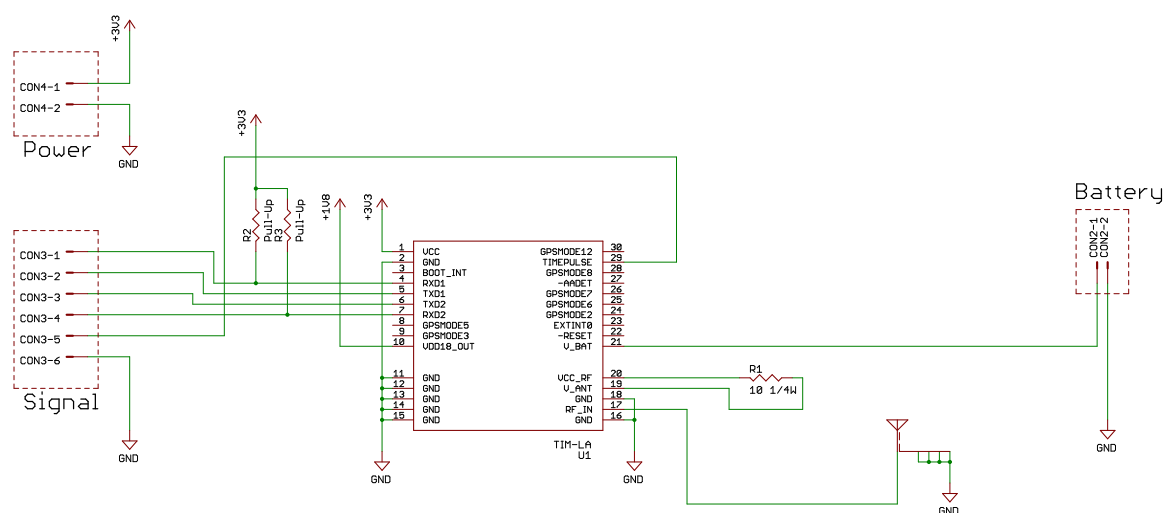


図 G.7: GPS 基板 回路図

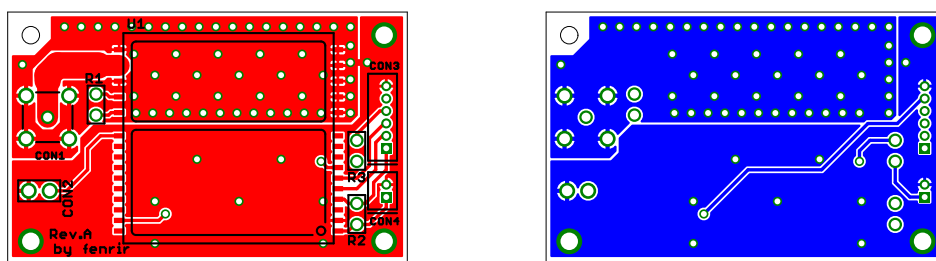


図 G.8: GPS 基板 アートワーク

## 参考文献

- [1] Robert M. Rogers, *Applied Mathematics in Integrated Navigation System, Second Edition*. AIAA Education Series, 2003. ISBN 1-56347-656-8.
- [2] Dan Simon, *Optimal State Estimation*. Wiley-Interscience, 2006. ISBN 978-0-471-70858-2.
- [3] *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*. Academic Press, Orlando, FL, 1977.
- [4] S. Winkler, M. Buschmann, L. Kruger, H. Schulz and P. Vörsmann, “State Estimation by Multi-Sensor Fusion for Autonomus Mini and Micro Aerial Vehicles”, *Paper 2005-5840 at AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 2005.
- [5] J. Liu, R. Li, X. Niu, and L. Qiao, “MEMS-Based Inertial Integrated Navigation Technology for Micro Air Vehicles”, *Papaer 2006-6547 at AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 2006.
- [6] Walid Abdel-Hamid, “Accuracy Enhancement of Integrated MEMS-IMU/GPS Systems for Land Vehicular Navigation Applications”, *Ph.D thesis, University of Calgary* 2005.
- [7] R. E. Kalman, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”, *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, Vol.82, D, pp.35-45, 1960.
- [8] A. Ude, *Filtering in a unit quaternion space for model-based object tracking*. Robotics and Autonomous Systems, vol.28, pp.163-172, 1999.
- [9] J. Wendel, J. Metzger, R. Moenikes, A. Maier, G. F. Trommer, *A Performance Comparison of Tightly Coupled GPS/INS Navigation Systems based on Extended and Sigma Point Kalman Filters*. Navigation, vol.53, No.1, pp.21-31, 2006.
- [10] John L. Crassidis, *Sigma-Point Kalman Filtering for Integrated GPS and Inertial Navigation* IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol.42, Issue.2, pp.750-756, 2006.
- [11] Chiang Kai-Wei, Noureldin Aboelmagd, El-Sheimy Naser, *A New weight updating method for INS/GPS integration architectures based on Neural Network* Measurement Science and Technology, Volume 15, Issue 10, pp. 2053-2061, 2004.
- [12] 張替正敏, 富田博史, 西澤剛志, 高精度 GPS 補強型慣性航法システムの開発. 日本航空宇宙学会論文集, Vol.50, No.585, pp.416-425 2002.
- [13] D.Choukroun, “A Novel Quaternion Kalman Filter”, *Paper 2002-4460 at 42th AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2004.
- [14] D. W. Allan, *Time and frequency (time domain) characterization, estimation and prediction of precision*



*clocks and oscillators* IEEE trans. UFFC, vol UFFC - 34, No.6, Nov. 1987.

[15] <http://www.xbow.jp/imu.pdf>

[16] 多摩川精機☒『ジャイロ活用技術入門』工業調査会, 2003. ISBN 4-7693-1208-3.

[17] 遠坂俊昭『計測のためのフィルタ回路設計』CQ 出版社, 1998. ISBN 4-7898-3282-1.

[18] Tsui, James Bao-yen. *Fundamentals of global positioning system receivers : a software approach - 2nd ed.*. Wiley-Interscience, 2005. ISBN 0-471-70647-7.

# 付記

## 発表履歴

- 2006年4月 航空宇宙学会 第37期年会講演会、“MEMS センサを用いた INS/GPS 複合航法システム”、成岡 優、土屋 武司
- 2006年9月 日本機械学会 2006年度年次大会、“汎用センサを用いた低コスト INS/GPS 複合航法システム”、成岡 優、土屋 武司
- 2006年11月 航空宇宙学会 第44回飛行機シンポジウム、“MEMS センサを用いた小型 INS/GPS 航法装置の開発”、成岡 優、土屋 武司
- 2006年11月 KSAS-JSASS Joint International Symposium on Aerospace Engineering、“A Portable and Cost-effective Configuration of Strap-down INS/GPS for General-purpose Use”、成岡 優、土屋 武司
- 2006年11月 COE シンポジウム 第3回 革新的飛翔物体に関する国際会議、“A Navigation Avionics for Small UAVs”、成岡 優、土屋 武司

## 特許

- 出願日: 2006年4月3日、特願 2006-101456(申請中)、“移動体制御装置及び移動体制御方法”、成岡 優、土屋 武司

# 謝辞

この卒業論文を書くにあたり、指導教員の土屋先生をはじめとして鈴木真二先生、ならびに助手の柄沢さん、鈴木・土屋研の先輩の方々からは多大なご指導・ご支援を賜りました。また、後輩の方々にも色々と話相手になっていただき勉強になりました。ありがとうございます。

学外の方についても、大変多くの方にご支援賜りました。ここで簡単にお世話になった方々に敬意を込めてご紹介させていただきたく思います。MEMS 慣性センサの較正試験ならびにモデル構築にあたっては三菱電機の廣川氏、実松氏に大変お世話になりました。調布飛行場でのセスナ実験では川崎航空の篠田氏をはじめとして多くの方にお世話になりました。竜ヶ崎の実験では新日本航空の方々にお世話になりました。MuPAL- $\alpha$  を用いた実験では JAXA の増位氏、富田氏を始めてとして多くの方にお世話になりました。また GPS については海洋大学の久保先生に大変お世話になりました。ありがとうございます。

最後に鈴木土屋研の同輩である井上君、今村君、河出君、松浦さん、森君には互いに激励しあい、ついには論文完成まで漕ぎ着けられたことに感謝の意を表したいと思います。

2016年8月17日 成岡 優