GPS への Kalman Filter の適用

1 Kalman Filter の式

1. Update 時、時間更新する

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \tag{1}$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + BQB^T \tag{2}$$

ただしここで Q は u の誤差共分散行列。

$$Q = E[uu^{\mathrm{T}}] \tag{3}$$

2. Correct 時、別の観測量が得られたとき

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \tag{4}$$

$$\hat{x}^k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \tag{5}$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \tag{6}$$

ただしここで観測方程式は (z_k は得られる観測量)

$$z_k = H\hat{x}_k^- + \varepsilon \tag{7}$$

また R は ε の誤差共分散行列。

$$R = E[\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}] \tag{8}$$

2 GPS の式

GPS の観測方程式

$$\boldsymbol{\rho} = G\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{x}\\ \delta b\end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\rho \tag{9}$$

観測方程式から最小二乗法を用いて更新する場合は

$$\begin{bmatrix}\delta\hat{\boldsymbol{x}}\\ \delta\hat{b}\end{bmatrix} = (G^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\rho} \tag{10}$$

3 GPS の式に対する Kalman Filter の適用

通常 Kalman Filter は早い更新周期で低い精度のものを運動方程式でモデル化 (=Update) し、遅い更新周期で高い精度のものを観測方程式でモデル化 (=Correct) することによって用いるが、今回は観測方程式のみがあるので Correct 時のみの式を使う。つまり、Kalman Filter よりは逐次的重み付き最小二乗法に近い。

式 (10) で用いた方法では更新データに対して最小二乗法を連続的に適用したため、ある更新に対してはそれ以前の更新で得られたデータをまったく活用していないことになる。それに対して今回用いる方法では、適

切な P と R のもとでは、Kalman Filter 内で効果的に以前に得られたデータが利用されることとなり、よりよい推定を行うことができるはずである。

観測方程式であるが、特に線形化を行う必要はない。かわりに観測方程式 (9) を式 (5) に適用することによって得られる $\hat{x}^k = \begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{x}} \\ \delta\hat{b} \end{bmatrix}$ について、更新があるたびに

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{x}} \\ \delta\hat{b} \end{bmatrix} \tag{11}$$

と推定位置をずらしていけばよいと思われる。これは更新前の推定位置から真値までのずれが

$$\hat{x}_k^- = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{x} \\ \delta b \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{12}$$

つまり、更新がなければ現在の推定位置が正しいものだと思うしかないということと同義である。

以上すべて式を書き出すと

$$K_k = P_{k-1}G^T(GP_{k-1}G^T + R)^{-1} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{x}} \\ \delta\hat{b} \end{bmatrix}_k = K_k\boldsymbol{\rho}_k \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{x}} \\ \delta\hat{b} \end{bmatrix}_k \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_{k-1} + K_k\boldsymbol{\rho}_k \end{aligned} \tag{15}$$

$$P_k = (I - K_kG)P_{k-1} \tag{16}$$

G は $\boldsymbol{x}^{(i)}$(i 番目衛星位置)、 $\boldsymbol{x}_{0k}$(観測者位置) から作られる。ニュートン・ラフソン法によると

$$G = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}_{0k}}{\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}_{0k}\|}\right)^{\mathrm{T}} & 1 \\ \left(-\frac{\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{x}_{0k}}{\|\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{x}_{0k}\|}\right)^{\mathrm{T}} & 1 \\ \left(-\frac{\boldsymbol{x}^{(3)}-\boldsymbol{x}_{0k}}{\|\boldsymbol{x}^{(3)}-\boldsymbol{x}_{0k}\|}\right)^{\mathrm{T}} & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{17}$$

P の初期値は適当に大きな対角行列でよいと思われる。

4　INS/GPS 2D

4.1　update 時

4.1.1　運動方程式

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \cos\phi_k & -\sin\phi_k \\ \sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_f \\ a_s \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \int_t^{t+\Delta t} \omega dt \approx \phi_k + \omega\Delta t \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k + \int_t^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}_k dt \\ &\approx \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}_k \Delta t \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_k + \int_t^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k dt \\ &\approx \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k \Delta t \end{aligned} \tag{21}$$

4.1.2　P の更新

運動方程式を真値との誤差で線形化する。状態量としては $\Delta\phi, \Delta\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \Delta\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の計 5 個。

順に線形化していくと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} \cos(\phi+\Delta\phi)_k & -\sin(\phi+\Delta\phi)_k \\ \sin(\phi+\Delta\phi)_k & \cos(\phi+\Delta\phi)_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_f+\Delta a_f \\ a_s+\Delta a_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\phi_k & -\sin\phi_k \\ \sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_f \\ a_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(a_f\cos\phi_k + a_s\cos\phi_k) \\ (a_f\cos\phi_k - a_s\sin\phi_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\phi_k & \cos\phi_k \\ \cos\phi_k & \sin\phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_f \\ \Delta a_s \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\phi \end{bmatrix}_{k+1} &= (\phi+\Delta\phi)_{k+1} - \phi_{k+1} \\ &\approx ((\phi+\Delta\phi)_k + (\omega+\Delta\omega)\Delta t) - (\phi_k + \omega\Delta t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} v_x+\Delta v_x \\ v_y+\Delta v_y \end{bmatrix}_{k+1} - \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{k+1} \\ &\approx (\begin{bmatrix} v_x+\Delta v_x \\ v_y+\Delta v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} a_x+\Delta a_x \\ a_y+\Delta a_y \end{bmatrix}_k \Delta t) - (\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}_k \Delta t) \\ &= \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \end{bmatrix}_k \Delta t \end{aligned} \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix}x+\Delta x\\ y+\Delta y\end{bmatrix}_{k+1} - \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_{k+1}\\
&\approx \left(\begin{bmatrix}x+\Delta x\\ y+\Delta y\end{bmatrix}_{k} + \begin{bmatrix}v_x+\Delta v_x\\ v_y+\Delta v_y\end{bmatrix}_{k}\Delta t\right) - \left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_{k} + \begin{bmatrix}v_x\\ v_y\end{bmatrix}_{k}\Delta t\right)\\
&= \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}_{k} + \begin{bmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\end{bmatrix}_{k}\Delta t
\end{aligned}
\tag{25}
$$

以上まとめて

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\Delta\phi\\ \Delta v_x\\ \Delta v_y\\ \Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -(a_f\cos\phi_k + a_s\cos\phi_k)\Delta t & 1 & 0 & 0 & 0\\ (a_f\cos\phi_k - a_s\sin\phi_k)\Delta t & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \Delta t & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \Delta t & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\phi\\ \Delta v_x\\ \Delta v_y\\ \Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}_{k}\\
&+ \begin{bmatrix}\Delta t & 0 & 0\\ 0 & -\sin\phi_k\Delta t & \cos\phi_k\Delta t\\ 0 & \cos\phi_k\Delta t & \sin\phi_k\Delta t\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\omega\\ \Delta a_s\\ \Delta a_f\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

よって P 更新は

$$
P_{k+1} = A_k P_k A_k^{\mathrm{T}} + B_k Q B_k^{\mathrm{T}} \tag{27}
$$

$$
A_k = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -(a_f\cos\phi_k + a_s\cos\phi_k)\Delta t & 1 & 0 & 0 & 0\\ (a_f\cos\phi_k - a_s\sin\phi_k)\Delta t & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \Delta t & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \Delta t & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{28}
$$

$$
B_k = \begin{bmatrix}\Delta t & 0 & 0\\ 0 & -\sin\phi_k\Delta t & \cos\phi_k\Delta t\\ 0 & \cos\phi_k\Delta t & \sin\phi_k\Delta t\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{29}
$$

4.2 correct 時

4.2.1 P の修正

$$
z \equiv \begin{bmatrix}\phi_{\mathrm{INS}} - \phi_{\mathrm{GPS}}\\ v_{x\mathrm{INS}} - v_{x\mathrm{GPS}}\\ v_{y\mathrm{INS}} - v_{y\mathrm{GPS}}\\ x_{\mathrm{INS}} - x_{\mathrm{GPS}}\\ y_{\mathrm{INS}} - y_{\mathrm{GPS}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\phi\\ \Delta v_x\\ \Delta v_y\\ \Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} + \boldsymbol{v} \tag{30}
$$

よって

$$
H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{31}
$$

$$K = PH^{\mathrm{T}}(HPH^{\mathrm{T}} + R)^{-1} \tag{32}$$

修正後の P ($\hat{P}$) は

$$\hat{P} = (I - KH)P \tag{33}$$

4.2.2　INS の修正

観測によって真値との差がわかる。これを $\Delta\hat{\phi}$ のように表現すると Kalman Filter から

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{\phi} \\ \Delta\hat{v}_x \\ \Delta\hat{v}_y \\ \Delta\hat{x} \\ \Delta\hat{y} \end{bmatrix} = Kz = K \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{INS}} - \phi_{\mathrm{GPS}} \\ v_{x\mathrm{INS}} - v_{x\mathrm{GPS}} \\ v_{y\mathrm{INS}} - v_{y\mathrm{GPS}} \\ x_{\mathrm{INS}} - x_{\mathrm{GPS}} \\ y_{\mathrm{INS}} - y_{\mathrm{GPS}} \end{bmatrix} \tag{34}$$

よって修正された ϕ, $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix} \phi \\ v_x \\ v_y \\ x \\ y \end{bmatrix}_{\text{after correct}} = \begin{bmatrix} \phi \\ v_x \\ v_y \\ x \\ y \end{bmatrix}_{\text{before correct}} - \begin{bmatrix} \Delta\hat{\phi} \\ \Delta\hat{v}_x \\ \Delta\hat{v}_y \\ \Delta\hat{x} \\ \Delta\hat{y} \end{bmatrix} \tag{35}$$